

<論 説>

セント・ペテルスブルグ・パラドックス

桐 谷 維

0. 序 説

ダニエル・ベルヌイが1738年に発表した論文“Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis (Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk)”では、セント・ペテルスブルグ問題と呼ばれるゲームを紹介し、その解法を提案している。このセント・ペテルスブルグ問題の特徴は、何故、人々が賭に打ち興じるのかという問題に対する合理的な説明付けとして「ゲームの利得の数学的期待値がゲームの参加料としての賭け金よりも大であるならば、このゲームに参加すべし」とする当時流布していた命題を否定するパラドックスとして提出されたことである。セント・ペテルスブルグ問題の解決は、以後、不確実性下の経済学の展開において重要な論題とされたのであるが、ダニエル・ベルヌイは、現代では期待効用と呼ばれるモラル期待という斬新な概念を提唱して、一応の解決策を提出した。しかし、このアイディアは、その後、アルフレッド・マーシャルにより彼の主著 *Principles of Economics* (『経済学原理』) において、当時の貨幣の限界効用逓減に関する信念からしてひとまず棄却されたが、1947年、ジョン・フォン・ノイマン＝オスカー・モルゲンシュテルン共著の画期的な大著 *Theory of Games and Economic Behavior* (『ゲームの理論と経済行動』、第2版) において期待効用仮説としてより堅固な復活を果たすのである。そして以後、期待効用仮説 (expected utility hypothesis) は、資産選択論をはじめ、多くの現代金融理論の指導的理念として定着し、著しい理論的展開を

促したのである。

本論文では、「セント・ペテルスブルグ・パラドックス」と呼ばれるダニエル・ベルヌイの所説と、それに関連する議論を解説的に紹介し、同時に、若干の批判的検討を付け加えることにする。

1. セント・ペテルスブルグ問題

ダニエル・ベルヌイ⁽¹⁾ (Daniel Bernoulli, 1700–1782) の従兄で Basel 大学法学教授ニコラス・ベルヌイ⁽²⁾ (Nicolas Bernoulli, 1687–1759) は、1713年9月9日、数学者ピエール・レモン・ドゥ・モンモール (Pierre Rémon de Monmort, 1678–1719) に5つの問題を提示し、その解法を求めた⁽³⁾。これら5つの問題の最後のものは、特に「セント・ペテルスブルグ問題」と呼ばれ、以下で述べるセント・ペテルスブルグ・ゲームと呼ばれる仮想的なギャンブルを提出していた [3, §17, p. 31]。ニコラス・ベルヌイは、ダニエル・ベルヌイへの書簡においてもセント・ペテルスブルグ問題の解法について意見を求め、1738年、ダニエル・ベルヌイ [3] はこの問題の解法を公表したが、これは、ギャンブル行動の経済学的、数学的定式化の最初であり、現代の期待効用仮説⁽⁴⁾の母体となる重要な着想を含んでいたのである。

[セント・ペテルスブルグ・ゲーム]

ピーターは硬貨を投げ、「表」が出るまで投げ続けるとする。ピーターは1回目の投げで「表」が出たら1デュカ、2回目の投げで「表」が出たら2デュカ、3回目の投げで「表」が出たら4デュカ、4回目が出たら8デュカをポールに与えることに同意し、以下同様、追加的に投げるたびに、支払うべきデュカが倍増される。われわれはポールの期待値を決定したいものと想定せよ。

一体、人はこのゲームに参加するのに、幾らの賭け金ならば喜んで支払おうとするであろうか。数学者がギャンブルにおける危険の測度を研究し初めて以

来、学界に流布していた危険の測度の数学的算定に関する標準的見解は、「ゲームの利得の数学的期待値⁽⁵⁾がゲームの参加料としての賭け金よりも大であるならば、このゲームに参加すべし」というものであった。例えば、サイコロを投げて出た目の数だけ利得（デュカ）が得られるというゲームを考えると、利得の数学的期待値 3.5 デュカよりも参加料（賭け金）が低ければ参加すべきであり、高ければ参加すべきではないとするのである。

しかしながら、このセント・ペテルスブルグ・ゲームの期待利得（expected gain）は、実は無限大である。硬貨の表が出る確率と裏が出る確率は等しく $\frac{1}{2}$ であり、和は 1 である。硬貨の 1 回目の投げで表が出れば、そこでゲームは終わる。硬貨の最初の投げで表が出る確率は $\frac{1}{2}$ であり、この場合、ポールは $2^0 = 1$ デュカを受け取るから、期待値への確率寄与は $2^0 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ デュカである。2 回目の投げで初めて表が出る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ であり、この場合、ポールは 2 デュカを受け取るから、この期待値への確率寄与は $2^1 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ デュカである。3 回目の投げで初めて表が出る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ であり、この場合、ポールは $2^2 = 4$ デュカを受け取るから、期待値への確率寄与は $2^2 \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}$ デュカである。一般に、硬貨の n 回目の投げで初めて表の出る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$ であり、その場合の利得は 2^{n-1} であるから、 $2^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}$ デュカだけ期待値に寄与する。硬貨の何回目⁽⁶⁾の投げで初めて表が出るかという事象は互いに排反的だから、 $n = 1, 2, 3, \dots$ のように無限回にわたるこのゲームの利得の数学的期待値は、各回の寄与の総和で表され、実は無限大になってしまう。

$$2^0 \left(\frac{1}{2}\right) + 2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \dots 2^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots = \infty \quad (1)$$

ゲームの利得の数学的期待値が無限大になるのであれば、このゲームに参加

する賭け金は有限でさえあれば、いくら巨額であっても構わないことになる。このように、ゲームの利得の数学的期待値が無限大になるという当時の学術的結論は、常識的な理性を持つ人々がこのゲームに対して通俗的に行う評価とは相容れないと考えられた。上述の数学的認識による算定法はポールの予想を無限大と評価するが、実際的评价は無限大ではなく、仮に有限であっても適当に高い価格であるならば、このゲームに参加する権利を誰も喜んで買わないであろう。このような見地でニコラス・ベルヌイは、ダニエル・ベルヌイ宛てに意見を求めた書簡の中で、「かなり合理的な人であるならば、20 デュカ位でも大いに喜んで彼の機会を他人に売るだろうことが認められる」と述べている [3, § 17, p.31]。

一般に、硬貨の n 回目の投げで初めて表が出る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ であり、硬貨の 1 回目から n 回目の投げまでに表が出る確率は、硬貨が 1 回目で表が出る事象、2 回目で初めて表が出る事象、3 回目で初めて表が出る事象等々が排反事象であることを考慮して、これらの和を取り、

$$\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (2)$$

と表される。これに応じて、硬貨の 1 回目から n 回目の投げまでにわたる利得の数学的期待値は

$$2^0 \left(\frac{1}{2}\right) + 2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + 2^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2} \quad (3)$$

と書かれる。

ここで、例示的な数値を用いて上述の内容を実感的に検討してみよう。もし、最初の 1 回目の硬貨投げで表が出てしまうならば、ポールは 1 デュカしかもらえず、その確率は $\frac{1}{2}$ である。仮にたった 5 回目の投げで初めて表が出たとすれば、 $n = 5$ に対してポールが手に入れる利得は $2^4 = 16$ デュカにすぎず、その確率は $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} = 0.031$ であって、すでにゼロに近い。また、硬貨の 1 回目から 5 回目の投げを通じて表が出てしまう確率は 0.969 にのぼり、極めて 1 に近い

ことが判る。

$$\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{32} = 0.969 \quad (4)$$

しかも、1回目から5回目の投げまでに表が出てしまう場合の利得の数学的期待値は無敵大どころか、たった2.5 デュカでしかない。

$$\begin{aligned} 2^0 \left(\frac{1}{2}\right) + 2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2^4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 \end{aligned} \quad (5)$$

このように、硬貨の1回目から5回目の投げまでに表が出てしまう確率は0.969で、すでに1に近く、期待利得が2.5 デュカでしかないという現実感覚と、期待利得が無敵大であるという理論的期待値との間には大きな認識的乖離がある。この認識的乖離はセント・ペテルスブルグ・パラドックスと呼ばれ、このパラドックスの合理的な説明付けが、ダニエル・ベルヌイ以来、数世紀にもわたって要請されたのである。

2. モラル期待

上述のセント・ペテルスブルグ・パラドックスの解決を意図して、ダニエル・ベルヌイは実に18世紀初頭に、現在の期待効用の概念に相当する「モラル期待 (emolumentum medium)」あるいは「平均効用 (mean utility)」と呼ばれる新しい概念を創案し、現代の効用理論としても通用する見解を次のように提出した。

「ある品目の価値の決定は、その価格や利得に基づくべきではなく、むしろそれがもたらす効用に基づくべきである。その品目の価格は品物自身に從属し、誰にでも共通である。しかしながら、その効用は推定値を設ける人の特定の環境に依存する。従って、疑いもなく貧者と富者の双方が同じ1000 デュカの金額

を得ても、この利得は富者よりも貧者にとって、より有意味 (significant) なのである」[3, §3, p.24]。

次いで、ダニエル・ベルヌイは、当時は新奇であった期待効用仮説を基本的原則として用いたが、その経緯を次のように説明している。

「もし各々の可能な利潤期待の効用に、それが起こり得る方法の個数を掛け、次いで、これらの積の和を、可能な場合の総数で割るならば、平均効用 (モラル期待) が得られるであろう。そして、この効用に対応する利潤は、問題とされる危険の価値に等しいであろう」[3, §4, p.24]。

「従って、どのような利得の効用が個人に生じるか、または逆に、所与の効用をもたらすのに、どれだけの利潤が必要とされるかという考察がその効用に加えられることなくしては、危険の価値のどのような正しい測定も獲得できないことが明かになる。しかしながら、ある品目の効用は環境とともに変化するであろうから、どのように厳密な一般化を行っても、余り尤もらしいとは思われない」[3, §5, p.24]。

ダニエル・ベルヌイは、このように述べた後、一つの事例として、次のような定式化を主張している。

「富の何らかの増加が、いかに些少であろうと、常に効用の増加に帰着し、すでに所有されている財の量に反比例するであろうことは高度に尤もらしい」[3, §5, p.25]。これは以下で紹介するように、対数効用関数を提案することになる。ここでベルヌイのいう「財の量」とは、生活に便宜を加えるすべての物を別義として含蓄し、どのような種類の欲望であれ、その十分な満足に貢献できる何らかの物を指しているが、これを賦存的財の⁽⁷⁾価値、すなわち、富と考えればよい。上の引用で、「富の何らかの増加が、いかに些少であろうと、常に効用の増加に帰着し」という表現は、富 w の微小増分 dw に関する効用 u の微小増分 du の比 $du/dw > 0$ を意味し、これが「既所有財の量 w に反比例する」とは、数式で表現すると、 b を正の定数として、

$$du = b \frac{dw}{w} \quad (6)$$

と書かれるであろう。この(6)式を積分する。

$$\int du = b \int \frac{dw}{w} \quad (6')$$

よって,

$$u = b \ln w + c \quad (7)$$

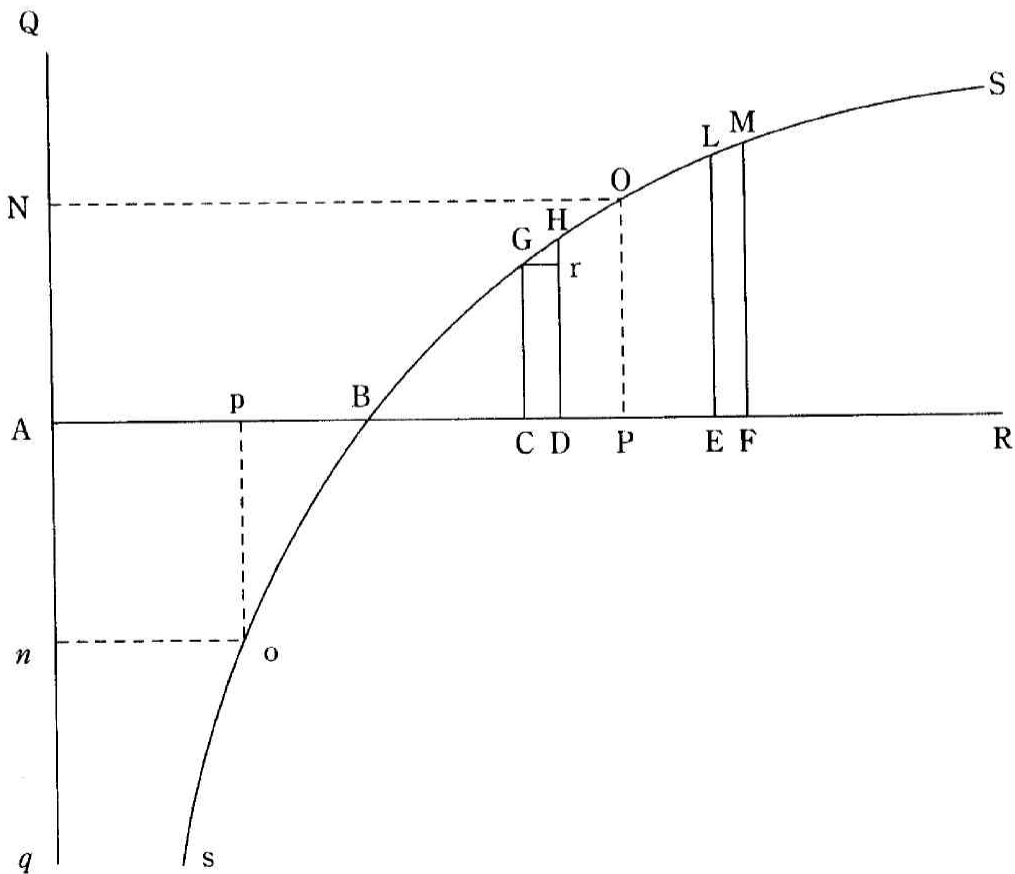
を得る。ここで、ベルヌイは w が初期富 α に等しく $w = \alpha$ であるとき、 $u = 0$ となるように設定するから、 $0 = b \ln \alpha + c$ より、 $c = -b \ln \alpha$ となり、この c を再び (7) 式に代入して、最終的に、次の (8) 式のようなベルヌイ型効用関数が得られる。

$$u = b \ln w - b \ln \alpha = b \ln \frac{w}{\alpha} \quad (8)$$

3. ベルヌイの事例的解説

(8) 式のベルヌイ型効用関数は対数形であり [3, pp.27, 28], 図 1 に示すように,

図 1 ベルヌイの図解



効用関数は富 (w) の対数関数であって、初期富 $\alpha = AB$ の座標で縦軸上の $\ln\alpha$ が対応するグラフで表される。ここで、ダニエル・ベルヌイの図解 [3, §7, p.26] を原典に沿って紹介すると、次のようである。

「線分 AB は財の初期保有量 (α) を表すとす。曲線 $BGLS$ の縦座標 CG , DH , EL , FM 等は、富の利得を示す横座標 BC , BD , BE , BF 等に対応する効用 u を表す。さらに、 m , n , p , q 等を富の利得 BC , BD , BE , BF 等が起こり得る場合の個数を表すとすれば、関連する危険な提案のモラル期待は次式のように与えられる。

$$PO = \frac{mCG + nDH + pEL + qFM + \dots}{m + n + p + q + \dots} \quad (9)$$

ここで、初期富 α からの利得 (gain) を R とし、新しい富 w を初期富 α と利得 R の和と定義する

$$w = \alpha + R \quad (10)$$

上述のダニエル・ベルヌイの解説では、セント・ペテルスブルグ問題において初期富 α の利得 R を離散的な値を取る確率変数としていることは大きな特徴である。

ダニエル・ベルヌイに従えば、図1で、 AB は初期富を表し、 AP は新しい富の期待値を表すから、横軸上で $AP - AB = BP$ は、セント・ペテルスブルグ問題の適切に期待される利得、つまり**危険な提案の(等価)価値** (the value of the risky proposition) (後掲の D) を表すことになる。解説的に再述すると、セント・ペテルスブルグ問題の期待富は無有限大であるが、期待効用は有限であり、この有限な期待効用に等しい効用が PO なのである。線分 BP ($= AP - AB$) は、期待効用に等しい効用をもたらすような利得であり、この問題の**危険な提案の等価価値** (D) と呼ばれる。さらに、ベルヌイは、もしこの危険な提案に喜んで参加する賭け金 (参加料) がどれ位の大きさであるかを知りたいのであれば、対数曲線を点 B の反対方向に延ばして、横座標 Bp が損失を表し、縦座標 po が対応する効用の減少を表すようにすればよいとする。利得の期待効用増加分を損失 (賭け金) の効用減少分に等しく置くとする着想は、ダニエル・ベルヌイの理念の重要な特徴に他ならない。

「公正なゲームにおいて、損失により被る不効用は、利得の獲得により導出される効用に等しくなければならないから、 $A_n = A_N$ または $p_0 = P_0$ と仮定しなければならない。すると、 B_p は、自己の金銭的状况を考える人々がそれ以上は敢えて賭けるべきでないとする賭け金を指示するであろう」[3, §7, p.27]。

[ベルヌイの系 I]

「これまで科学者たちが通常、頼ってきた仮説は、すべての利得がもっぱら利得自身、すなわち利得の本質的特性に基づいて評価されねばならず、また、これら利得がその利得に直比例する効用を常にもたらすであろうという仮定に基づいていた。この仮説に基づくと、曲線 $B S$ は直線になる。さて、もし再び、(9)式があり、またもし両辺に、それぞれの因数を導入するならば、次式になる。

$$BP = \frac{mBC + nBD + pBE + qBF + \dots}{m + n + p + q + \dots} \quad (11)$$

これは、通常、容認されている原則と一致する」[3, §8, p.27]。

(9)式は、通常、認識における期待効用の定義であり、 P_0 が効用（縦座標）の加重平均に等しいことを告げている。他方、(11)式は、古典的な発想法における期待利得の定義に他ならず、 $B P$ は利得（横座標）の加重平均⁽⁸⁾である。もし効用関数 $B S$ が曲線ではなく直線であるならば、期待効用(9)についての議論は、期待利得(11)についての議論と本質的に同義になり、当時の確率信念に矛盾しないことになる。

「われわれの仮説に基づいて、われわれは無限小の利得を考えなければならないから、利得 $B C$ と $B D$ をほぼ等しいと捉え、それゆえ、それらの差 $C D$ は無限小になるであろう。もし $B R$ に平行して $G r$ を引くならば、 $r H$ は、その財産が $A C$ であり、小なる利得 $C D$ を獲得する人の効用の無限小増分を表す。しかしながら、この効用（の増分 $r H$ ）は、他の事情を一定として、それが比例する微小利得 $C D$ のみならず、それが反比例する従前に所有されている富 $A C$ にも関係するはずである」[3, §10, p.27]。

ベルヌイのこの内容は、すでに(6)式で表現されているが、具体的には、初期

富の位置 $AB = \alpha$ に利得 R を加えて得られる所有富を $AC = w = \alpha + R$, 効用の微小増分を $rH = du$, 富の微小増分を $CD = dw$, かつ $b > 0$ を正の定数と置くなれば, この積分は (6') 式の積分と同じものになる。それゆえ, 最終的に対数形式は (8) 式と同じになる。そこで (8) 式に (10) 式 $w = \alpha + R$ を代入すると次式のように書かれる。

$$u = b \ln \frac{\alpha + R}{\alpha} \quad (12)$$

これは, 利得 R を変数とする対数型の効用関数である。

ところで, 対数効用関数 (12) 式を想定すれば, $PO = b \ln (AP/AB)$ であり, また, (9) 式で縦座標は $CG = b \ln (AC/AB)$, $DH = b \ln (AD/AB)$, 等々だから, (9) 式は次のように書き直せる。

$$b \cdot \ln \frac{AP}{AB} = \frac{\left(mb \cdot \ln \frac{AC}{AB} + nb \cdot \ln \frac{AD}{AB} + pb \cdot \ln \frac{AE}{AB} + qb \cdot \ln \frac{AF}{AB} + \dots \right)}{m+n+p+q+\dots} \quad (13)$$

ここで, 上式を整理すると, 期待富 AP が次のように得られる。

$$AP = (AC^m \cdot AD^n \cdot AE^p \cdot AF^q \cdot \dots)^{1/(m+n+p+q+\dots)} \quad (14)$$

この式は, さまざまな場合の危険な提案の価値を測る本質的な意味合いを持ち, ダニエル・ベルヌイにより次のような原理として述べられている。

「何らかの利得が従前からの所有財産に加算されねばならない。すると, この和は, 利得が得られるであろう可能な場合の個数により与えられる冪数だけ累乗される。次に, これらの項は互いに掛け合わされる。次いで, この積について, すべて可能な場合の個数により与えられる累乗で根を開かねばならない。そして最後に, 初期所有の価値がそれから控除されねばならない。すると, 残余は問題の危険な提案の価値を指示する」 [3, § 12, p.28]。

約言すれば, 期待富 AP から $AB (= \alpha)$ を引いた残余の BP は期待利得, すなわち, 利得 R の期待値 $E[R]$ に他ならず, ベルヌイの言葉でいう「問題の危険な提案の価値」を表すことになる。問題の危険な提案の等価価値は予想利得 (prospective gain) ないし期待利得 (expected gain) であり, 数学者カール・メンガー (Karl Menger, 1902-) は, これを D と表すが, 以下で, この D を数式的

に導出し、その内容を確認してみよう [3, § 18, p.34, fn.10]。

4. 予想利得

いま、(14)式で $N = m + n + p + q + \dots$ と置き、 N を無限大に及ぶ場合の個数と考える。ダニエル・ベルヌイの解説を紹介すると次のようである。

「ここで考えられる場合の個数は無限大である。すなわち、これら場合の2分の1においてゲームは最初の投げで終るのであろうし、場合の4分の1においてゲームは2回目の投げで完了するのであろうし、8分の1において3回目の投げで、16分の1において4回目の投げで終る等々である⁽⁹⁾。もし無限大に及ぶ場合の個数を N で表すならば、ボールが1デュカを得る場合の個数は $N/2$ であり、2デュカを得る場合の個数は $N/4$ であり、4デュカを得る場合の個数は $N/8$ 、8デュカを得る場合の個数は $N/16$ 等々、無限に続くのである」 [3, § 18, p.32]。

この論述を具体的に示すと次のようになる。このゲームが硬貨の最初の投げで終わるとき、場合の個数は $m = \frac{N}{2}$ 、ボールが得る利得は $2^0 = 1$ デュカである。同様に、ゲームが2回目の投げで終わるとき、場合の個数は $n = \frac{N}{4}$ 、利得は $2^1 = 2$ デュカである。3回目の投げで終わるとき、場合の個数は $p = \frac{N}{8}$ 、利得は $2^2 = 4$ デュカである。4回目の投げで終わるとき、場合の個数は $q = \frac{N}{16}$ 、利得は $2^3 = 8$ デュカ、等々である。それゆえ、APを含む(13)式で、初期富を A 、 $B = \alpha$ と置き、 $AC = \alpha + 2^0$ 、 $AD = \alpha + 2^1$ 、 $AE = \alpha + 2^2$ 、 $AF = \alpha + 2^3$ 、 \dots を代入し、 $AB = \alpha$ を引けば、ボールの危険な提案の等価価値 D を秤量することができる。

$$\begin{aligned}
 D &= BP = AP - AB \\
 &= \sqrt[N]{(\alpha+1)^{N/2} \cdot (\alpha+2)^{N/4} \cdot (\alpha+4)^{N/8} \cdot (\alpha+8)^{N/16} \cdot \dots} - \alpha \\
 &= \sqrt{(\alpha+1)} \cdot \sqrt[4]{(\alpha+2)} \cdot \sqrt[8]{(\alpha+4)} \cdot \sqrt[16]{(\alpha+8)} \cdot \dots - \alpha
 \end{aligned} \tag{15}$$

ポールの危険な提案の等価価値 D を秤量するこの式について、ダニエル・ベルヌイは次のように解説している。

「ポールの予想利得を秤量するこの公式から、この値 (D) はポールの財産 (α) の大きさとともに変化し、ポールの財産が無限大にならなければ決して無限大にならないことが判る。加えるに、次の系が得られる。もしポールが何も所有しないならば、(15)式で $\alpha=0$ を代入して、彼の危険な提案の等価価値 D は

$${}^2\sqrt{1} \cdot {}^4\sqrt{2} \cdot {}^8\sqrt{4} \cdot {}^{16}\sqrt{8} \cdot \dots \quad (16)$$

になるであろう。以下の(17), (18)式で示すように、この値は厳密に2になる。もし彼が10デュカを所有していたならば、彼の期待はほぼ3デュカの価値になるであろう。もし彼の富が100デュカであるならば、ほぼ4デュカ、もし彼が1000デュカを所有していたならば、6デュカの価値になるであろう。このことから、ポールの機会を20デュカで買い取ることが理に適うためには、人はどれほど巨額の財産を所有しなければならないか、容易に判るのである」[3, § 19, p. 32]。

しかしながら、上述のダニエル・ベルヌイの数値に関する主張は必ずしも明確ではない。ここでは、ポールの財産が全然なく、初期富がゼロで $\alpha=0$ という単純な場合にポールの危険な提案の等価価値の評価 D が厳密に2デュカであることだけが確認できる。

まず、(15)式で $\alpha=0$ と置けば、(16)式を得る。

$$D = {}^2\sqrt{1} \cdot {}^4\sqrt{2} \cdot {}^8\sqrt{4} \cdot {}^{16}\sqrt{8} \cdot \dots$$

上式両辺の対数を取る。

$$\ln D = \left(\frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{N-1}{2^N} + \dots \right) \ln 2 \quad (17)$$

ここで(17)式の括弧内 (・) を T と置けば

$$T - \frac{1}{2} T = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^N} + \dots = \frac{1}{2} \quad (18)$$

となるから、 $T=1$ であると判る。よって、 $\ln D = \ln 2$ から $D=2$ が求められる。すなわち、初期富がゼロで $\alpha=0$ の場合、セント・ペテルスブルグ問題の危険な提案の等価価値は、たった2デュカに過ぎないと評価できるのである。しか

しながら、ここで注意すべきは、対数関数において分母の $\alpha=0$ は不能だから、⁽¹⁰⁾ 実際に、初期富ゼロの場合は非現実的なのである。

5. 期待効用

カール・メンガー⁽¹¹⁾は、無限大に及ぶ場合の数 N について、無限大の半分とか4分の1とかいう議論は不可能であり、ダニエル・ベルヌイの議論における場合の個数 N は無意味であるという当然の批判を行ったが、危険な提案の評価に関するベルヌイ仮説に基づきながら、カール・メンガーの示唆に沿った古典的なポールの期待を敷衍すると以下のようになる [3, p.32, fn.10]。

(12)式の効用関数において、利得 R は $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{n-1}, \dots$ デュカのように発生する一方で、対応する確率は $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{2^n}$ である。よって、ポールの期待効用の一般項は $\frac{b}{2^n} \ln \frac{\alpha + 2^{n-1}}{\alpha}$ と表されるから、その期待効用の具体的な形式は次のように書かれる。

$$\begin{aligned} E[u] &= \frac{b}{2} \ln \frac{\alpha + 2^0}{\alpha} + \frac{b}{2^2} \ln \frac{\alpha + 2^1}{\alpha} + \frac{b}{2^3} \ln \frac{\alpha + 2^2}{\alpha} + \dots \\ &+ \frac{b}{2^n} \ln \frac{\alpha + 2^{n-1}}{\alpha} + \dots \\ &= b \ln \{(\alpha + 2^0)^{1/2} (\alpha + 2^1)^{1/2^2} (\alpha + 2^2)^{1/2^3} \dots (\alpha + 2^{n-1})^{1/2^n} \dots\} \\ &- b \ln \alpha \end{aligned} \tag{19}$$

ここでポールの初期財産に、どれだけの金額 D を加算すると、効用関数の値が上の期待効用と同じ値になるかを、カール・メンガーの所説を借りて検討してみよう [3, § 18, p.32, fn.10]。この金額 D は先に「危険な提案の等価価値」と呼ばれたものであり、これを対数効用関数に代入したものを左辺とする。また、右辺には(19)式の右辺を置き、これらを等しく置く。

$$\begin{aligned} b \ln \frac{\alpha + D}{\alpha} \\ &= b \ln \{(\alpha + 2^0)^{1/2} (\alpha + 2^1)^{1/2^2} (\alpha + 2^2)^{1/2^3} \dots (\alpha + 2^{n-1})^{1/2^n} \dots\} \\ &- b \ln \alpha \end{aligned} \tag{20}$$

これより、問題の危険の等価価値 D を導出する。

$$D = (\alpha + 2^0)^{1/2} (\alpha + 2^1)^{1/2^2} (\alpha + 2^2)^{1/2^3} \dots (\alpha + 2^{n-1})^{1/2^n} \dots - \alpha \quad (21)$$

すなわち、これは、ダニエル・ベルヌイが説明抜きで提出した表現(15)式の論証に他ならないことが判る。すなわち、期待効用と等しい効用をもたらす利得の大きさが D と表されているのである。⁽¹²⁾

ダニエル・ベルヌイの根幹的な主張は、公正なゲームに参加する主体が支払う参加料(賭け金)を埋め合わせるには、一体どれだけの大きさの有利さが必要であるかを測るのに際して、それまで通念であった「期待利得が参加料を超えればよい」という考え方を訂正し、「利得の期待効用が賭け金の支出に伴う効用の減少を上回るべきである」とする原則の提案であった。すなわち、ベルヌイは、図1で、等価期待利得 $B P (=D)$ の効用 $O P$ と参加料 $B p$ (以後、 z と定める) に対応する不効用(効用の減少分) $o p$ とを比較して、 $o p \leq O P$ ならば、このゲームに参加すべきとする新しい基準を提案したのである。

z を参加料 ($B p$) とすれば、ベルヌイの賭けへの参加条件 $o p \leq O P$ は、具体的には次式のように書かれる。

$$-b \ln \frac{\alpha - z}{\alpha} \leq b \ln \frac{\alpha + D}{\alpha} \quad (22)$$

これより、参加料は

$$z \leq \frac{\alpha D}{\alpha + D} \quad (23)$$

であり、提案の等価価値 D と参加料 z の差額は非負と判る。すなわち、

$$D - z \geq D - \frac{\alpha D}{\alpha + D} = \frac{D^2}{\alpha + D} \geq 0 \quad (24)$$

よって、 $z \leq D$ 、すなわち、参加料 z は常に D よりも小さいか等しいことが導かれる。

6. ガブリエル・クラメールの見解

ところで、数学者ガブリエル・クラメール (Gabriel Cramér, 1704-52) がニコラス・ベルヌイに当てた 1728 年の書簡では、彼がダニエル・ベルヌイ以前に有界な効用関数によるパラドックス解法の同じ着想を独立に持っていたことが明

かにされている。この書簡でクラメールは、先のセント・ペテルスブルグ問題で、ポールの期待値が無限大になるにしても、合理的な人間ならば誰もこのゲームに参加する権利を買うのに 20 デュカも払わないであろうと述べている。(ここでいうゲームに参加する権利を買い取る価格とは、ゲームの参加料ないし賭け金 z に他ならないであろう。)

また、さらにガブリエル・クラメールの同書簡に述べられているパラドックス解法の重要な部分を解説を混ぜて敷衍すると以下のものである。

数学的な計算と通俗的な評価の間の乖離をどう説明するかについて、クラメールは、数学者たちが理論上、貨幣をその量に比例して評価するのに対して、実際に、常識的な人々は貨幣を、そこから得る効用に比例して評価するという事実に由来すると信じている。

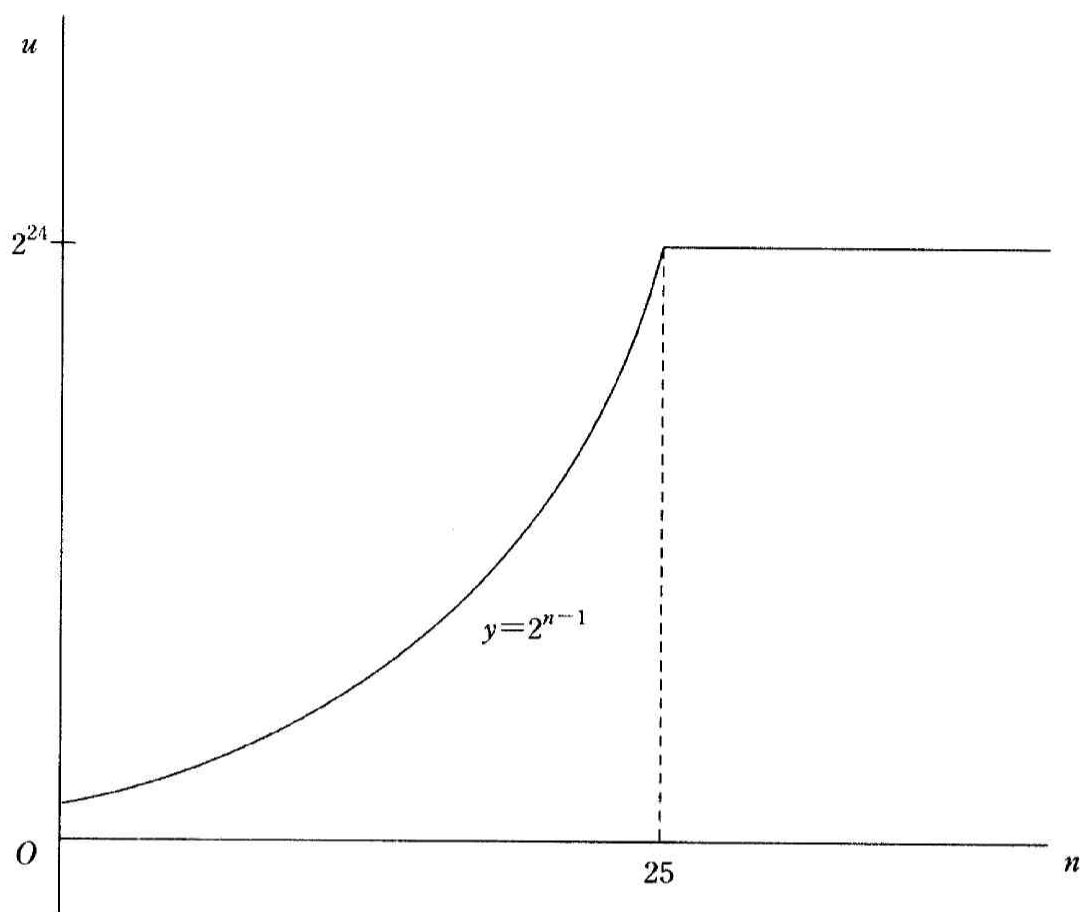
「多分、百回目あるいは千回目の硬貨の投げのように、かなり遅くまで硬貨の表が出ないならば、私が勝ち取ることのできる莫大な金額によって数学的期待値は無限大になる。さて、実際のところ、もし私が賢明な人間として合理的に考えるならば、この(無限大の)金額は私にとって千万や 2 千万デュカ程度の金額以上には価値がなく、より多くの快樂をもたらすわけでもなく、このゲームを受け入れるように影響するわけでもない。それ故、千万デュカ以上の金額、(単純化のため)例えば $2^{24} = 16,777,216$ デュカ以上のどのような金額も、彼による価値の認識において 2^{24} デュカに等しいと見なされるとする。あるいは、よりましな言い方であろうが、硬貨の表が出るまで如何に長くかかろうとも、その金額 2^{24} デュカ以上には決して勝ち取れないと想定しよう。」[2, pp.33,34]

ここでの意味は、24 回目の投げまで効用は利得とともに増大するが、25 回目の投げから先で利得は増加しても効用は一定 (2^{24}) に留まると想定することであり、図 2 のように、効用関数は、 $n=1, \dots, 24$ に対して利得の額に等しく $u=2^{n-1}$ 、 $n=25, 26, \dots$ に対して一定額 $u=2^{24}$ に等しいとする。

$$u = \begin{cases} 2^{n-1} & (n=1,2,\dots,24) \\ 2^{24} & (n=25,26,\dots) \end{cases}$$

他方、利得が発生する確率は 24 回目までの投げと同じく 25 回目から先でも

図2 クラメールの設例



組織的に下がって行くから、この場合のモラル期待（期待効用）は次のように書かれる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \dots + \frac{1}{2^{25}} \cdot 2^{24} + \frac{1}{2^{26}} \cdot 2^{24} + \frac{1}{2^{27}} \cdot 2^{24} + \dots \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (24 \text{ 回}) \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 12 + 1 = 13 \end{aligned}$$

すると、24回目までの期待効用は12であり、25回目から先の部分和は初項 $\frac{1}{2}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比級数になるから1である。よって、期待効用関数は次のように書かれる。

$$E[u] = \begin{cases} n/2 & (n=1,2,\dots,24) \\ 13 - 1/2^{n-24} & (n=25,26,\dots) \end{cases} \quad (25)$$

「すると、私のモラル期待は（無限大から）13 ⁽¹³⁾ デュカまで値が下落し、それに対

して支払われるべき等価価値も同様に下がるから、この結果は、期待値が無限大になると捉えるよりもずっと合理的であると思われる。」[3, p.34]。

クラメールの所見は、さらに以下のように続けられる。ただし、以下で述べる効用関数は具体的に $y=\sqrt{2^n}$ を想定していることに注意すれば理解し易いであろう。

「富のモラル値に関する別の仮説を採りさえすれば、提案の等価価値はさらに小額にすることができる。何故ならば、1億デュカは千万デュカよりも多い満足をもたらすのは事実であるが、10倍の満足をもたらすとは限らないので、私がたったいま仮定したものは、完全には正しくないからである。もし、例えば、財のモラル値がそれら財の数学的量の平方根に比例し、例えば40,000,000により提供される満足が10,000,000により提供される満足の2倍であると仮定するならば、私の心霊的期待⁽¹⁴⁾(psychic expectation)は次のようになる。

$$\frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{4} + \frac{1}{16}\sqrt{8} + \dots = \frac{1}{2-\sqrt{2}} \quad (26)$$

しかしながら、この大きさは求める等価価値ではない。何故ならば、この等価価値は、私のモラル期待に等しい必要はなく、むしろ、損失から生じる苦痛が、私の利得から導出したい快樂のモラル期待に等しいような大きさのはずである。それゆえ、われわれの仮説に基づけば、等価価値は

$$D = \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\frac{1}{6-4\sqrt{2}} \right) = 2.91 \quad (27)$$

にならねばならない。これは結果的に3より小さく、全く取るに足りない大きさであるが、それにも拘らず、13よりも通俗的評価に近いのである」[3, pp. 34,35]。

上掲の(27)式は、モラル期待と効用を等しくするような利得変数の値 D を示し、 $E[u]=u(D)$ 、すなわち具体的には $\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\sqrt{D}$ から求められる。この D を危険な提案の等価価値と呼ぶのである。

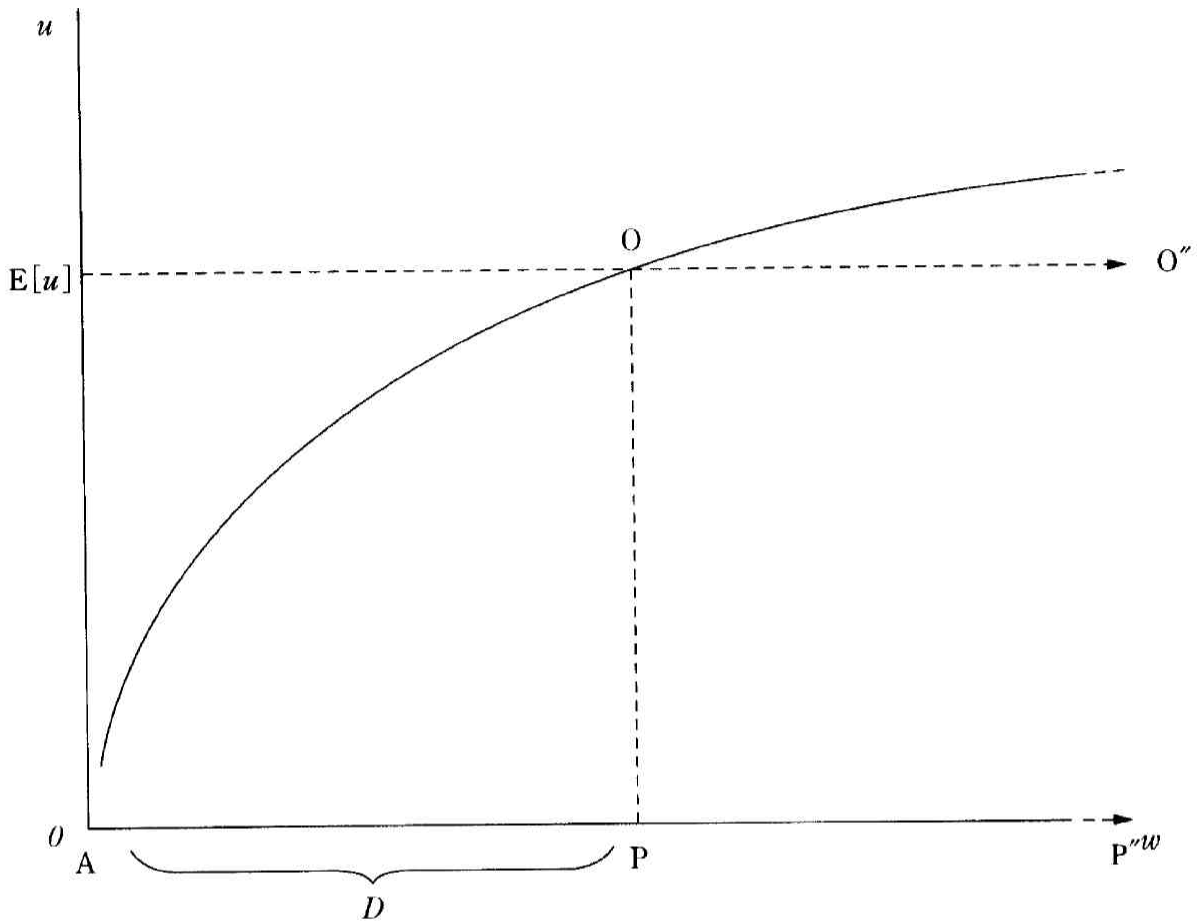
7. ベルヌイ理論の誤謬

ここで図1に立ち帰って、ダニエル・ベルヌイの所論を批判的に再検討してみよう。

まず第一に、ダニエル・ベルヌイは、対数関数の効用関数を想定し、セント・ペテルスブルグ問題の期待富が無限大であっても、対応する効用は有限になると主張し、図1に示すように、有限な期待効用POを図示している。しかし、対数関数の無限大な引数に対する対数はやはり無限大であるから、対数効用が有限になるという主張は決して容認できるものではない。とはいえ、ダニエル・ベルヌイの発想は必ずしも完全な誤謬であるとはいえない。無限遠点の彼方において有限になる効用関数の形式は無数に存在するから、対数関数でなくとも、そのような関数を想定すれば、ダニエル・ベルヌイのほとんどの主張はそのまま成立するのである。

第二に、ダニエル・ベルヌイが描いた図1は、初期富 $AB (=a)$ を保有する個人が賭に出たときのあり得べき期待富 $a + E[R]$ が無限大であるにも拘らず、期待富を有限なAPに取り、対応する期待効用をOPに取っている。賭に出た場合の可能な期待富は無限大であるから、決して図1のように有限な富APにはなり得ない。また、無限大の期待富に対応する期待効用は、対数効用関数において、到底、OPにはなり得ないはずである。ダニエル・ベルヌイが示した図1の内容は、場合の個数 N が無限大であるにしても、期待富が有限であるような一般的な設定を示したものであって、実は、セント・ペテルスブルグ問題の図式には、直接、該当しないことに注意すべきである。

セント・ペテルスブルグ問題の期待利得は無限大に及ぶが、利得は離散的に発生し、また、凹な効用関数が想定されるから、期待効用は有限な $u(\infty)$ よりも必ず小になると考えられる。すなわち、図3に示すように、仮に期待利得が無限大であって、 $E[a+R] = a + E[R] = \infty$ が無限遠点 P'' に位置するとしても、効用関数は有限であるから、期待効用は有限であって、しかも有限な

図3 等価価値 D の図解

$u(\infty)$ よりも小さい高さ $O''P''$ で現れると思われる。それゆえ、その有限な高さ $O''P''$ のままで水平に左方へ伸ばした補助線が凹効用曲線と出会う点 O と、その垂線の足 P までの高さ OP は期待効用 $O''P''$ に等しく、距離 AP は等価価値 D を表すことになる。それゆえ、 OP は、無限遠点に位置する期待富 $E[\alpha + R]$ に対応する期待効用 $E[u(\alpha + R)]$ と等しい効用を表し、その足が有限な等価価値 D であると解釈することができる。

上の事情は、効用関数が一般に凹関数であることから導かれる。すなわち、厳密な凹関数に関するイェンセン (Jensen) の公式⁽¹⁵⁾により、離散的な富の場合の期待効用 $E[u(\alpha + R)]$ は期待富 AP の効用 $u(E[\alpha + R])$ よりも必ず小である。

$$b \ln \left(\frac{mAC + nAD + pAE + qAF + \dots}{m + n + p + q + \dots} \right) > b \left(\frac{m \ln AC + n \ln AD + p \ln AE + q \ln AF + \dots}{m + n + p + q + \dots} \right) \quad (28)$$

よって、富APの効用であるOPは期待効用そのものではあり得ない。

第三に、ダニエル・ベルヌイは、人が賭に出るか出ないかを決定する際の目安として、期待利得がゲームの賭け金(参加料)よりも大か等しいとする従前の伝統的な考え方を改変して、初期富 α から賭け金 z を差し引いたときの効用の減少分よりも利得の期待効用の増加分が大であるならば、賭に参加すべきであるという基準に置き換えている。そのため、図1で示すように、等価期待効用OPと(絶対値で)等しい不効用opが初期富の点Bの左方に現れる点pを取り、線分Bpを賭け金としている。

しかし、ダニエル・ベルヌイのこのモデル化には疑問がある。線分OPが示す期待効用はすでに賭け金 z を支払った後に到達できるものであり、賭け金の支出を考慮しない富の期待効用と賭け金支出の不効用を比較することは適当ではない。むしろ、賭け金を支払ってゲームに参加したときの富の期待効用と、賭に参加しないときの現状維持の富の効用とが比較されるべきである。

8. ベルヌイ・モデルに対する修正案

上述の論点に従って、ダニエル・ベルヌイの所論を修正することにしよう。ダニエル・ベルヌイのモデルでは、利得変数 R を初期富 α に付加して現行富 w としたが、ここでは、賭け金 z を明示的に導入し、新しく粗利得変数 x を定義する。初期富 α から賭け金 z を差し引いた賭け金差引き初期富 $\alpha-z$ に賭の粗利得 x が加えられ、新しい富 w になるものとしよう。

$$w = \alpha - z + x \quad (29)$$

つまり、ベルヌイ・モデルにおける $w = \alpha + R$ を考慮すれば、

$$R = x - z \quad \text{あるいは} \quad x = R + z \quad (30)$$

と書き直すのである。

第一の論点について、当初、初期富 α を保有する主体が賭に出るとき、彼は賭け金 z を支払い、賭により獲得するはずの利得 x の期待値 $E[x]$ を予想し、これと賭け金の大小を勘案することになる。すると、主体が賭に出たときの期

待富は,

$$E[w] = E[\alpha - z + x] = \alpha - z + E[x] \quad (31)$$

と書かれる。既に見たように、セント・ペテルスブルグ問題における利得 x の期待値は無限大になることが判っている。すなわち,

$$\begin{aligned} E[x] &= 2^0 \left(\frac{1}{2}\right) + 2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + 2^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots = \infty \end{aligned} \quad (32)$$

上式(32)が示すように,

$$E[x] = \infty \quad (33)$$

であるから,

$$E[w] = \alpha - z + E[x] = \infty,$$

も成り立つ。すなわち、期待富は無限大である。

次に、厳密な凹効用関数上で、イェンセンの定理により、賭に出たときの期待富の効用 $u(E[w])$ は一般に、富の期待効用 $E[u(w)]$ よりも大である。すなわち,

$$u(E[\alpha - z + x]) = u(\alpha - z + E[x]) > E[u(\alpha - z + x)] \quad (34)$$

上の不等式の左辺二項は、無限大の期待富 ($\alpha - z + E[x] = \infty$) の関数であり、無限大の場合もあり有限な場合もあるが、一般に右辺は有限な効用と見られる。これをセント・ペテルスブルグ問題に適用すると、対数効用関数について次式のように書くことができる。

$$b \ln \frac{E[\alpha - z + x]}{\alpha} = b \ln \frac{\alpha - z + E[x]}{\alpha} > E \left[b \ln \frac{\alpha - z + x}{\alpha} \right] \quad (35)$$

上の関係式は構造的に重要な意味を持っている。左辺のポールの期待利得 $\frac{\alpha - z + E[x]}{\alpha}$ は(33)の $E[x] = \infty$ により明らかに無限大であるが、右辺の期待効用は有限であり、それと等しく置いた効用 OP が期待効用に等しく取られていると解釈することができる。一般形で書けば,

$$u(\alpha - z + E[x]) > E[u(\alpha - z + x)] = u(\alpha - z + D) \quad (36)$$

である。すなわち、危険な提案の等価価値 D を用いて、有限な期待効用と等しく置かれる効用を定めるのである。(36)式をセント・ペテルスブルグ問題の形式

で書き直すと、次式のようになる。

$$b \ln \frac{\alpha - z + E[x]}{\alpha} > E \left[b \ln \frac{\alpha - z + x}{\alpha} \right] = b \ln \frac{\alpha - z + D}{\alpha} \quad (37)$$

上の不等式の左辺は、 $E[x] = \infty$ により、無限大であるが、右辺の二項

$$E \left[b \ln \frac{\alpha - z + x}{\alpha} \right] = b \ln \frac{\alpha - z + D}{\alpha} \quad (38)$$

は有限であり、この等式が成立するように、危険な提案の等価価値 D が定義されると解釈すべきである。

第二の論点について、賭に出るときの富の期待効用と賭に出ない現状維持の富の効用を比較してみよう。賭に出るときの賭け金 z を初期富 α から差し引き、利得 x を加えた富 $\alpha - z + x$ の期待効用 $E[u(\alpha - z + x)]$ と、賭に参加しないときの効用、つまり現状維持の効用 $u(\alpha)$ とが比較されるべきである。すなわち、(38)を用いれば、上述の内容は、賭に出たときの賭け金 z を初期富 α から差し引き、危険な提案の等価価値 D を加えた富 $(\alpha - z + D)$ の効用 $u(\alpha - z + D)$ と、現状維持の効用 $u(\alpha)$ とを比較すればよいことにする。ベルヌイ型の対数効用関数において、現状維持の効用は $u(\alpha) = b \ln(\alpha/\alpha) = 0$ だから、次の期待効用の符号が非負であるならば、賭に参加することになる。

まず、ベルヌイ型の期待効用関数は次のように書かれる。

$$\begin{aligned} E[u] &= \frac{b}{2} \ln \frac{\alpha - z + 2^0}{\alpha} + \frac{b}{2^2} \ln \frac{\alpha - z + 2^1}{\alpha} + \frac{b}{2^3} \ln \frac{\alpha - z + 2^2}{\alpha} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{b}{2^n} \ln \frac{\alpha - z + 2^{n-1}}{\alpha} + \dots \\ &= b \ln \{ (\alpha - z + 2^0)^{1/2} (\alpha - z + 2^1)^{1/2^2} (\alpha - z + 2^2)^{1/2^3} \dots \\ &\quad \dots (\alpha - z + 2^{n-1})^{1/2^n} \dots \} - b \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) \ln \alpha \\ &= b \ln \{ (\alpha - z + 2^0)^{1/2} (\alpha - z + 2^1)^{1/2^2} (\alpha - z + 2^2)^{1/2^3} \dots \\ &\quad \dots (\alpha - z + 2^{n-1})^{1/2^n} \dots \} - b \ln \alpha \end{aligned} \quad (39)$$

ただし、上式で、 $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ を用いている。

ここで、 $\alpha - z + D = (\alpha - z + 2^0)^{1/2} (\alpha - z + 2^1)^{1/2^2} (\alpha - z + 2^2)^{1/2^3} \dots$ と置けば、期待効用の(39)式は次のように書き直され、非負であれば、賭に参加してもよいことになる。

$$E[u] = b \ln \{\alpha - z + D\} - b \ln \alpha = b \ln \frac{\alpha - z + D}{\alpha} \geq 0 \quad (40)$$

すると、 $\alpha > 0$ と $b > 0$ に対して、 $\ln \frac{\alpha - z + D}{\alpha} \geq 0$ だから、

$$\frac{\alpha - z + D}{\alpha} \geq 1 \quad (41)$$

より、

$$D \geq z \quad (42)$$

を得る。すなわち、主体が賭に出るために支払う賭け金 z よりも危険な提案の等価値 D の方が大か等しいならば、現状維持の効用よりも賭に出た場合の期待効用の方が大か等しいことが判る。

期待効用(39)は一般型であり、このままでは具体的な数値を捕捉できないので、ダニエル・ベルヌイにならって、極めて単純なケースについて考えよう。いま、 $\alpha = z$ とする。これは、初期富 α をすべて賭け金 z にするか、あるいは賭け金の分しか初期富を保有していない場合を考えればよい。すると、(39)式で期待効用は、次のようになる。

$$\begin{aligned} E[u] &= \frac{b}{2} \ln \frac{2^0}{\alpha} + \frac{b}{2^2} \ln \frac{2^1}{\alpha} + \frac{b}{2^3} \ln \frac{2^2}{\alpha} + \cdots + \frac{b}{2^n} \ln \frac{2^{n-1}}{\alpha} + \cdots \\ &= b \ln \{(2^0)^{1/2} (2^1)^{1/2^2} (2^2)^{1/2^3} \cdots \\ &\quad \cdots (2^{n-1})^{1/2^n} \cdots\} - b \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \right) \ln \alpha \\ &= b \ln \{(2^0)^{1/2} (2^1)^{1/2^2} (2^2)^{1/2^3} \cdots (2^{n-1})^{1/2^n}\} - b \ln \alpha \\ &= b \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \cdots \right) \ln 2 - b \ln \alpha \\ &= b \ln 2 - b \ln \alpha = b \ln \frac{2}{\alpha} \end{aligned} \quad (43)$$

ただし、上式3行目の(・)内は初項 $1/2$ 、公比 $1/2$ の無限等比級数により1である。

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

また、上式5行目の(・)を T と置いて $T - T/2$ を作ると、 $1/2$ であると判る。

$$T - \frac{1}{2} T = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

$$= \frac{1/2^2}{1-1/2} = \frac{1}{2} \quad (44)$$

よって、 $T=1$ が得られる。

また、初期富をすべて賭け金とする $\alpha=z$ における(40)式は、

$$E[u] = b \ln \frac{D}{\alpha} \geq 0 \quad (45)$$

となるから、(43)と(45)式から

$$b \ln \frac{2}{\alpha} = b \ln \frac{D}{\alpha} \geq 0 \quad (46)$$

を得る。(46)式を総括すると、 $\frac{2}{\alpha} = \frac{D}{\alpha} \geq 1$ より

$$D = 2 \geq \alpha = z \quad (47)$$

という結果が得られる。

これは、初期富をすべて賭け金にするとき、危険な提案の等価価値 D が2デユカであり、この $D=2$ が賭け金 $\alpha=z$ よりも大か等しければ賭に参加すべきことを告げている。そして、このときの期待効用は(43)式より $b \ln \frac{2}{\alpha}$ であり、有限であることが判る。

9. マーシャルのベルヌイ批判

ダニエル・ベルヌイのモラル期待の眼目は、仮に期待利得が無限大になるにしても、効用の期待値は有限に留まるという点にある。すると、人々が、ある有限な賭け金を喜んで支払い、このゲームに参加するという結論を矛盾なく導出できることになる。

危険を含む対象間の選択が期待効用極大化の理念により合理的に説明づけられるとするダニエル・ベルヌイの提案は、1870年代に展開された周知の効用理論に呼応して、特に所得の限界効用逓減の法則⁽¹⁶⁾に適合すると目され、当初は容認されるどころとなった。しかし、その後、ダニエル・ベルヌイのアイディアは、たびたび引用され言及されたにも拘らず、貨幣の限界効用逓減に関する信念からギャンブルの存在を説明できず、正確性を失うとして、アルフレッ

ド・マーシャル (Alfred Marshall, 1842-1924) 等によりひとまず棄却されるに至った。

アルフレッド・マーシャルは、ダニエル・ベルヌイの所説にならって、個人の所得 y から得られる満足 (効用) を u とし、その所得 y の 1% の増加が満足 u の 1 単位を増加させると考えた。

$$du = k \frac{dy}{y} \quad (48)$$

とする。それゆえ、 k , C を定数として

$$u = k \cdot \ln y + C \quad (49)$$

と書かれる。これは、満足の水準 u を所得 y の対数関数と想定する点で、ダニエル・ベルヌイの着想に呼応している [10, Note VIII, pp.842, 843]。

さらにベルヌイにならって、 a を個人が最低限の生活を支える必需品を賄う所得水準とし、所得 y が a を割り込めば苦痛が快楽を上回り、効用が負 ($u < 0$) となる。また、所得 y が a と等しくなれば苦痛と快楽が釣り合い、効用がゼロ ($u = 0$) となる。そこで、(49)式において、 $y = a$ のとき $u = 0$ と置けば、

$$0 = k \cdot \ln a + C \quad (50)$$

すなわち、

$$C = -k \ln a \quad (51)$$

よって、この C を(49)に代入すると、最終的に

$$u = k \ln \frac{y}{a} \quad (52)$$

と設けられる。

しかしながら、マーシャルは実際的原理として、ベルヌイあるいは他の確定的な仮説に基づけば、ギャンブルが完全に公正であって公平な条件の下で実行されるときでさえも必ず経済的損失を招き、理論的に公正な保険が常に経済的利得をもたらすと主張した [10, p.135, fn.2]。公正なギャンブルでさえも必ず経済的損失を招くというマーシャルの所説は、ダニエル・ベルヌイの例のみならず、一般の限界効用逓減の仮定から必ず導かれると主張し、マーシャルは次のような例示を提出した [10, Note IX, p.843]。しかし、このように主張することは、後述するように、実は誤っていると思われる。マーシャルのこの論述は次

の通りである（ただし、この部分の表記はマーシャルに従う。）

初期富 x を持つ主体の快樂（効用）を $u(x)$ と表し、特定の事象が起こる確率を p とする。マーシャルは定義を明記していないが、 y を利得ないし所得と考えてよいであろう。そして、個人は、 $(1-p)y$ を得るか py を失うかが起こる公正な賭に出ると仮定する。賭に出ないとき、主体は現状維持の効用 $u(x)$ に留まるのに対して、賭に出ることは現状維持の効用 $u(x)$ から期待効用 $E[u]$ への移行を意味するとして、マーシャルは期待効用の形式を次のように提出している。

$$E[u] = p \cdot u\{x + (1-p)y\} + (1-p)u(x - py) \quad (53)$$

上式をテイラー展開する。

$$E[u] = u(x) + \frac{1}{2} p(1-p)^2 y^2 u''\{x + \theta(1-p)y\} \\ + \frac{1}{2} p^2(1-p)y^2 u''(x - \Theta py) \quad (54)$$

限界効用逓減の法則により、すべての x に対して限界効用は減少的であって $u''(x) < 0$ と仮定されるから、54式より、 $E[u(x)]$ は常に $u(x)$ よりも小であり、必ず $u(x) > E[u(x)]$ になるとマーシャルは主張する [10, Note IX, P.843]。それゆえ、貨幣の限界効用逓減の法則に基づく限り、経済理論の見地からして、人がギャンブルに参加すると、必ず効用の損失を招くことになる。それでもなお人々が不公正なギャンブルに対して進んで参加し、喜んで賭に出るとすれば、賭に出る動機は、もはや経済的要因では説明できず、ギャンブルから得られる興奮とか歓楽のような、もっぱら非経済的な心理的要因からしか説明できないと断じている。

しかしながら、上述のマーシャルの議論には、期待効用の設定に大きな難点があると思われる。まず、 py を失うか $(1-p)y$ を獲得するかの公正な賭の期待効用を53式のように置くマーシャルの定式化は、実は期待効用が初期富 x 上の点 C^* に必ず来るように、事前に補整された形式になっていたのである。マーシャルは明示していないが、マーシャルの定式化における期待富は

$$E[x] = p \cdot (x + (1-p)y) + (1-p)(x - py)$$

$$=px + (1-p)x = x \quad (55)$$

となり、期待富が必ず初期富 x の位置に来るように操作されていたのである。マーシャルのいう「公正な」ギャンブルとは、期待富が初期富に等しくなるものを指していたと類推することができる。すると、マーシャルのベルヌイ批判は、期待効用仮説に準拠した批判ではなく、相変わらず伝統的な期待富仮説に基づくものであったことに他ならず、無意味であったことになる。

また、(53)式を書き直すと、

$$\begin{aligned} E[u] &= p \cdot u\{x + (1-p)y\} + (1-p)u(x-py) \\ &= p \cdot u(x-py+y) + (1-p)u(x-py) \end{aligned} \quad (56)$$

すなわち、上式右辺の形式から解釈すれば、主体は py を支払って賭に参加し、確率 p で利得 y を得る効用と確率 $(1-p)$ で利得ゼロとなるギャンブルを想定したことになる。しかし、賭け金（ゲームへの参加料） py が、たとえ主観的であれ、確率 p を含むのは実際的ではない。賭け金（参加料）は主体にとって、むしろ客観的な与件だからである。

マーシャルの理念を活かしながら、このゲームを再定式化すると以下のように設けられるであろう。初期富 x を保有する主体が、賭け金 z を払って、確率 p で利得 y を得るか、確率 $(1-p)$ で利得がゼロ（つまり、賭け金を失う）であるギャンブルに参加する。このとき、主体の期待富は次のようになる。

$$E[u] = p \cdot u(x-z+y) + (1-p)u(x-z) \quad (57)$$

そこで、上式をテイラー展開する。

$$\begin{aligned} E[u] &= p \cdot u(x) + p \cdot u'(x)(y-z) + \frac{1}{2}p \cdot u''\{x + \theta(y-z)\} \\ &\quad + (1-p)u(x) - (1-p)u'(x)z + \frac{1}{2}(1-p)u''(x - \Theta z) \\ &= u(x) + u'(x)(py-z) \\ &\quad + \frac{1}{2}(p \cdot u''\{x + \theta(y-z)\} + (1-p)u''(x - \Theta z)) \end{aligned} \quad (58)$$

これより、結果的に次を得る。

$$E[u] - u(x)$$

$$=u'(x)(py-z) + \frac{1}{2}(p \cdot u''\{x+\theta(y-z)\} + (1-p)u''(x-\Theta z)) \quad (59)$$

上式右辺で、限界効用は正と仮定され、 $u'(x) > 0$ 、かつ逓減的限界効用の仮定より $u''(x) < 0$ だから、 $E[u] - u(x)$ の符号は、項 $(py-z)$ の符号に依存することが判る。ここで、次のような判定が可能である。

(1)もし $py \leq z$ ならば、右辺は必ず負になり、 $E[u] < u(x)$ である。

(2)もし $py > z$ ならば、右辺の符号は確定できないが、期待効用が現状維持の効用より大、すなわち、 $E[u] > u(x)$ となる可能性は優に存在することになる。

ここで、特に、 $py = z$ となる特殊な場合を想定するならば、右辺第1項はゼロとなり、第2項は必ず負だから、先のマーシャルのモデルに帰着することが確かめられる。以上は、ダニエル・ベルヌイが提案した期待効用仮説を、アルフレッド・マーシャルが、貨幣の限界効用逓減の法則の理念に反するとして、棄却した根拠に対するわれわれの反証である。われわれの一般的な設定(57)式で、 z を py と置けば、マーシャルの(53)式になることが判る。

10. 公正なギャンブルの再定義

公正なギャンブルとは、期待効用が現状維持の効用と等しくなるようなギャンブルであると定義することは一つの提言であろう。ここで、初期富 x を保有する主体が、利得 y を得る確率が p 、利得 y を失う確率が $1-p$ である賭に賭け金 z を払って参加するとすれば、まず、賭けに出たときの富 w の期待値 $E[w]$ は、次のように書かれる。

$$\begin{aligned} E[w] &= p \cdot (x-z+y) + (1-p)(x-z-y) \\ &= x-z + (2p-1)y \end{aligned} \quad (60)$$

また、賭に出たときの期待効用は、次のように書かれるであろう。

$$E[u(w)] = p \cdot u(x-z+y) + (1-p)u(x-z-y) \quad (61)$$

そこで、上式をテイラー展開して整理すると、次のようになる。

$$E[u(w)] - u(x) = \{(2p-1)y - z\} \cdot u'(x)$$

$$+ \frac{1}{2} p \cdot u''(x + \theta(y-z))(y-z)^2 + \frac{1}{2}(1-p)u''(x - \Theta(y+z))(y+z)^2 \quad (62)$$

右辺第2項と第3項は限界効用逓減 ($u'' < 0$) により負であるが、第1項は正の限界効用により $u' > 0$ であるが、 $(2p-1)y-z$ は必ずしも負ではないから、期待効用は必ずしも現状維持の効用 $u(x)$ よりも小ではないことが判る。すなわち、

(1)もし $(2p-1)y \leq z$ ならば、右辺は必ず負になり、 $E[u(w)] < u(x)$ である。

(2)もし $(2p-1)y > z$ ならば、右辺の符号は確定できないが、 $E[u(w)] > u(x)$ となる可能性がある。

特記すれば、 $(2p-1)y = z$ のとき、(60)式で $E[w] = x$ となり、マーシャルのいう公正なゲームとなり、(62)式で、 $E[u(w)] - u(x) < 0$ になるから、期待効用は必ず現状維持の効用よりも低くなることが判る。

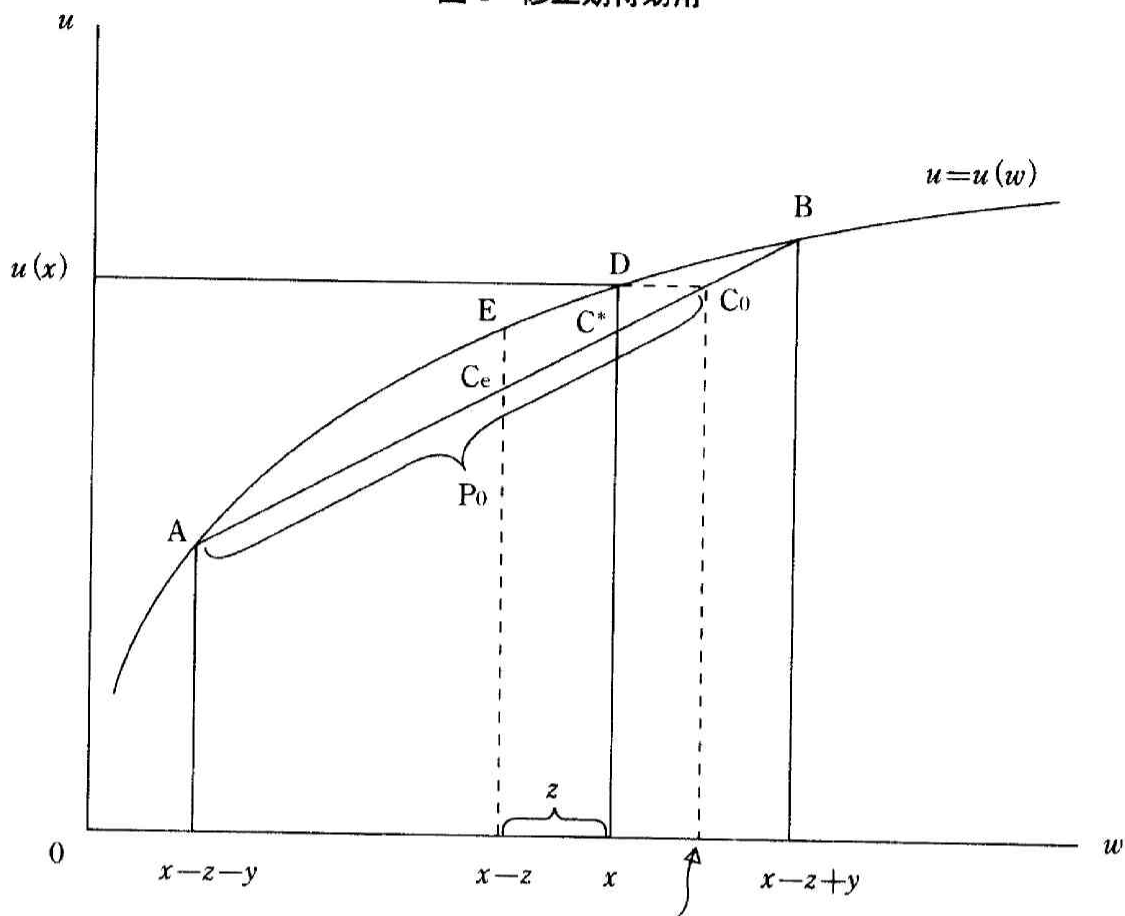
それでは、主体が賭に出ることと賭に出ないことの間で無差別になるような確率はどのように導かれるであろうか。そのために、(62)式をゼロ ($E[u] - u(x) = 0$) と置いて p について解けばよい。

$$p_0 = \frac{u'(x)(y+z) - \frac{1}{2}u''(x - \Theta(y+z))(y+z)^2}{2u'(x)y + \frac{1}{2}\{u''(x + \theta(y-z))(y-z)^2 - u''(x - \Theta(y+z))(y+z)^2\}}$$

$$\doteq \frac{1}{2} + \frac{y}{4}R_A(x) \quad (63)$$

ただし、最後の項は、右辺の分子と分母で θ と Θ を近似的にゼロとみなし、 z を微小と見て無視し、さらに、 $R_A(x) = -u''(x)/u'(x)$ と置いて得られる。 $R_A(x)$ はアロー (Kenneth J. Arrow) の絶対危険回避 (absolute risk aversion) の概念であり、定義により正である。それゆえ、正の利得 $y > 0$ を考慮して、 $E[u(w)] = u(x)$ となる確率 p_0 は、ざっと $p_0 = 1/2$ よりも大であることが判る。また、もし $E[u(w)] > u(x)$ ならば、 $p > p_0 (> 1/2)$ となる p が存在し、このときマーシャルが否定した賭に出ることの利益的誘因としての経済的動機が存在することになる。

図4 修正期待効用



この経緯を図4で図解する。初期富 x に対応する効用 $u(x)$ は賭に出ない現状維持の効用であり、点Dで表される。確率 p で y を得るか、確率 $1-p$ で y を失うかの賭に出るときの期待効用(53')は $x-z-y$ と $x-z+y$ に対応する点A, Bを結ぶ線分を $p:1-p$ で配分する点 C_0 の水準になる。

まず、 $E[u]=u(x)$ のとき、点Cは点Dと同水準になり、水平に並ぶ。このとき、点 C_0 に対する確率は $p=p_0$ である。

次に、 $E[u]<u(x)$ のとき、 $p<\frac{1}{2}+\frac{y}{4}R_A(x)$ であり、点Cは点Eの水準よりも下方にある。

特に、よく用いられる例証である $p=1/2$ について検討を加えてみよう。まず、賭に出ると富が x から $x-z$ に減り、効用は点DからEに移る。利得 y を得る確率と失う確率が等しいとき $p=1/2$ だから、点Cは点Eの垂直下方に来る。すなわち、この場合の期待効用は

$$E[u(x-z+y)] = \frac{1}{2} \{u(x-z+y) + u(x-z-y)\} \quad (64)$$

となるから、これをテイラー展開すると

$$\begin{aligned} E[u(x-z+y)] - u(x) &= -u'(x)z + \frac{1}{4} \{u''(x-z+\theta y)(y-z)^2 \\ &\quad + u''(x-z-\Theta y)\}(y+z)^2 < 0 \end{aligned} \quad (64'')$$

のように、期待効用は必ず元の効用よりも小になる。

しかし、より重要なケースは、 p が 1 に近付き、点 C が点 C_0 よりも上方に位置し、適当に点 B に近くなるとき、期待効用が明らかに現状維持の効用よりも大となる事実である。このように $E[u(w)] \geq u(x)$ となる可能性が十分に存在することは、限界効用逓減に基づく公正なゲームに関するマーシャルのベルヌイ批判が一概に当てはまらないことを明確に示すことになり、マーシャルがセント・ペテルスブルグ解法を棄却した根拠を失うことになる。

マーシャルの定式化を修正して、より一般的な接近を示せば、次のようになるであろう。すなわち、一般に、確率 p で y_1 を得るか確率 $1-p$ で y_2 を失うかのゲームの期待富は

$$E[w] = p \cdot (x+y_1) + (1-p)(x-y_2) \quad (65)$$

と書かれ、期待効用は

$$E[u(x+z)] = p \cdot u(x+y_1) + (1-p)u(x-y_2) \quad (66)$$

と書かれる。これをマーシャルの(53)式に沿って設けると、主観的確率 p を事前にわきまえて、 $y_1 = (1-p)y$, $y_2 = py$ と見立てたときの特殊なギャンブルのケースになる。この場合に期待富がどうなるかを確かめると、

$$E[x] = p \cdot (x+y_1) + (1-p)(x-y_2) \quad (67)$$

$$= p \cdot (x+(1-p)y) + (1-p)(x-py) = x \quad (68)$$

となるから、マーシャルの定式化では、当初から賭に出たときの期待富が現状維持の富に等しくなり、期待効用 C^* が現状維持の原効用 D よりも小となるように予め操作されていたことが読み取れるのである。

[注]

- (1) ダニエル・ベルヌイ (Daniel Bernoulli, 1700–82) は、スイスの数学者、物理学者、解剖学者、植物学者であり、9人の有能な数学者を生んだ Bernoulli 一族3世代の第2世代に当たり、Johann Bernoulli (1667–1748) の次男である。主たる専門領域は理論物理学・力学・確率論であり、正規法則の導出、逆三角関数、微分方程式、剛体・流体運動、St.Petersburg Paradox (セント・ペテルスブルグ逆説) の解法等を提起した。期待効用仮説の先駆者であり、所得の限界効用逓減を仮定して公正な賭の期待効用が負であることを示した。
- (2) ニコラス・ベルヌイ (Nichoras Bernoulli II, 1687–1759) は、スイスの数学者、Padua 大学数学教授で、ダニエル・ベルヌイの従兄に当たる。
- (3) これら5つの問題は、Pi re Rémon de Monmort, *Essai d'analyse sur jeux de hazard*, Paris, 第2版, 1713, の付録に採録されているが、さらに、同書の付録には偶然と確率に関するピエール・モンモールとヨハン・ベルヌイ (Johann Bernoulli) およびニコラス・ベルヌイとの間に交わされた書簡も掲載されている。
- (4) 期待効用仮説 (expected utility hypothesis) は、設問の最大化を図る標的を利得の数学的期待値ではなく、効用関数の数学的期待値とするものである。注5を参照せよ。
- (5) 確率変数を x , 確率密度関数を $f(x)$ とするとき、確率変数 x の数学的期待値 (mathematical expected value) は、離散的な場合、 $E[x] = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$ であり、連続的な場合、 $E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ と書かれる。どちらも $f(x)$ を加重とする x の加重平均と考えられる。また、確率変数 x の関数 $g(x)$ の数学的期待値は、離散的な場合は $E[g(x)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) f(x_i)$ であり、連続的な場合は $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$ である。
- (6) 事象 A と事象 B が同時に生起することがないとき、これらの事象 A と B は互いに排反的 (mutually exclusive) であるという。
- (7) 賦存的財とは、当初から所有していた財をいう。
- (8) (9)式の P O は曲線 S s の下の高さの加重平均であり、(10)式の B P は初期富の点 B からの距離、つまり利得を表しているが、双方とも、離散的な変数の無限個の項から成っているのであって、連続な変数ではないことに注意すべきである。
- (9) ダニエル・ベルヌイは、 $N = m + n + p + q + \dots$ を無限大に及ぶ場合の個数と考えるが、無限大の N の2分の1とか4分の1とかの概念は成立しないことに注意すべきである。
- (10) 対数型の期待効用関数で $\alpha = 0$ と置くととき、不能になる。それ故、ダニエル・ベルヌイの初期富がゼロの場合の議論は成立しない。しかし、後述するように、初期富 α と賭け金 z が等しく、 $\alpha = z$ と設けるならば、不能にならない。
- (11) カール・メンガー (Karl Menger, 1902–) は、オーストリアの数学者。集合論的位相幾何学を専攻し、1次元連続体としての曲線の定義、可分距離空間の次元論、帰納

- 的次元, Menger-Nöbeling の埋め込み定理等に業績を残す。経済学との関連では, Daniel Bernoulli の St.Petersburg Paradox の解説とその解法研究が有名であり, 不確実性下の行動分析に先鞭を付けた。経済学の始祖 Carl Menger の子息である。
- (12) 数式で表せば, $E[u(\alpha+R)] = u(\alpha+D)$ となるような等価利得を D としている。すなわち, 初期富 α に利得 R を加えた富の期待効用が, 初期富 α に等価利得 D を加えた富の効用と等しい。
- (13) 期待効用は, 24 回目までの部分和が 12 であり, 25 回目から先の部分和が初項 $\frac{1}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比級数になるから 1 であり, 級数和は 13 である。
- (14) 「心霊的期待 (psychic expectation)」の語は, Gabriel Cramér による「モラル期待」または「期待効用」と同義の用語である。
- (15) Jensen の不等式は, 凹関数 f に対して $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ と主張する。ただし, λ_i は $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ なるような非負数 $\lambda_i \geq 0$ である。それゆえ, 凹関数 f に対して $f(E[x]) \geq E[f(x)]$ も同様に成り立つ。
- (16) 限界効用逓減の法則とは, 図形的に言えば, 効用曲線の接線の勾配が変数の増加とともに次第に減少して水平に近付くことをいう。効用関数 $u = u(x)$ において微係数 $u' = du/dx$ が次第に減少するとは, $u'' = d^2u/dx^2 < 0$ なることをいう。
- (17) Taylor 展開は, 関数を多項式で近似し, その誤差の評価を与える一般的な公式である。1 変数の関数 $f(x)$ について,
- $$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + R_n$$
- である。ただし, R_n は剰余項である。具体的には近似式として 1 ないし 2 項までが多く用いられる。
- (18) 絶対危険回避は投資主体の危険回避の度合いを表す指標として作られた。限界効用 $u'(w)$ が富の増加に応じて厳密に減少することを危険回避の必要かつ十分条件とするならば, 限界効用の変化率 $u''(w)$ を危険回避の測度に用いてもよいが, この $u''(w)$ に準拠しながら, 効用関数に正の 1 次変換を施しても不変に留まるように設けた測度が絶対危険回避 $R_A(x) = -u''(x)/u'(x)$ である。

[参考文献]

- [1] Arrow, Kenneth J., "Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations," *Econometrica*, Vol.19, October, 1951.
- [2] Arrow, Kenneth J., *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, North-Holland, 1970.
- [3] Bernoulli, Daniel, "Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis," *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Tomus V, 1738, ("Expo-

- sition of a New Theory on the Measurement of Risk," translated by Louise Sommer, *Econometrica*, Vol.22, January, 1954.)
- [4] Friedman, Milton, & L.J.Savage, "The Utility Analysis of Choices Involving Risk," *Journal of political Economy*, Vol.56, August, 1948.
- [5] 桐谷 維, 『ポートフォリオ・セレクション—金融資産選択の理論』, 春秋社, 1968年。
- [6] 桐谷 維, 「不確実性と期待効用—セント・ペテルスブルグ・パラドックスをめぐる学説史的展望」, 『経済と経済学』, 東京都立大学経済学会, 1979年。
- [7] 桐谷 維, 「確率的優越性と危険回避—資産選択の現代理論」, 『経済と経済学』, 東京都立大学経済学会, 1981年。
- [8] 桐谷 維, 『資産選択の現代理論』, 東洋経済新報社, 1986年。
- [9] 桐谷 維, 「セント・ペテルスブルグ・パラドックスの再考」, 『経済と経済学』, 東京都立大学経済学会, 1991年。
- [10] Marshall, Alfred, *Principles of Economics*, 1st ed., 1890, 8th ed., New York, The Macmillan Co., 1948.
- [11] Menger, Karl, "Das unsicherheitsmoment in der Wertlehre. Betrachtungen im Anschluß an des sogenannte Petersburger Spiel," *Zeitschrift für National-ökonomie*, Vol.5, 1934.
- [12] Monmort, Pierre R.de, *Essai d'analyse sur les jeux de hazard*, Paris, 1708.
- [13] von Neumann, John, & Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 2nd ed., Princeton, Princeton University Press, 1947.