

流動性選好の資産選択論的接近

桐 谷 維

0. 序

本論稿は、最も単純な形式における資産選択論の数学的モデルを用いて個別投資主体の最適確実資産保有を明確にした後、各種のパラメーター変化がこの最適確実資産保有に及ぼす効果を分析する。この場合、通常は最適危険資産混合を明示的に決定するのに対して、本論では、危険資産を消去し、最適な確実資産を決定するモデルを展開する。次いで、Keynes 及び Tobin の市場利子率の理念に即応した解釈を用いて、確実資産を現金と見なして、流動性選好の態様を検討する。ここでの資産選択論は、いわゆる Tobin 流の 2 パラメーター方式によるものではなく、Arrow タイプの危険回避論と Diamond-Stiglitz 型の平均効用保存的拡散に関連する理論的接近を試みるものである。得られた論理的帰結は一応の輪郭を示していると思われるが、まだいくつかの問題点をはらんでいるので、一層の精緻化が当然に求められるべきものである。

1. 資産選択の単純モデル

個別投資主体は初期賦存富 w_0 を保有し、それを危険資産（混合）と確実資産に配分投資する。確実資産保有額を m 、危険資産保有額を α とすれば、

$$(1) \quad w_0 = m + \alpha$$

となり、これは投資主体の初期富の制約を構成する。確実資産は確定利子を生み、その確定利子率を i とする。危険資産は資本利得と配当または利子から成る収穫を生み、その収穫率を確率変数 x とする。各資産の価値額 m と α は一定

期間後にそれぞれ $(1+i)m$ と $(1+x)\alpha$ に増殖して投資主体の富は w になる。

$$\begin{aligned} (2) \quad w &= (1+i)m + (1+x)\alpha \\ &= (1+i)m + (1+x)(w_0 - m) \\ &= (1+i)w_0 + (x-i)(w_0 - m) \end{aligned}$$

ただし、(1)式を(2)式の α に代入し、 α を消去する。

本モデルでは信用取引を許容することとし、資産保有額に符号条件を課さず、資産保有額が正・ゼロ・負の値を取り得るものとする。すると個別投資主体の投資残高の立場は危険資産 α の符号条件（または富 w_0 に対する確実資産 m の相対的額の大きさ）により三つの区域に分類される。すなわち、買い長の立場 $\alpha > 0$ ($m < w_0$)、持高ゼロの立場 $\alpha = 0$ ($m = w_0$)、売り長の立場 $\alpha < 0$ ($m > w_0$) である。また、買い長の立場は現物取引の立場 $0 < \alpha \leq w_0$ ($w_0 > m \geq 0$) と信用買いの立場 $\alpha > w_0$ ($m < 0$) に細分化される。

個別投資主体の富 w に関する効用関数を

$$(3) \quad u = u(w, \rho) = u((1+i)w_0 + (x-i)(w_0 - m), \rho)$$

のように指定する。ただし、 ρ は危険回避の序数的指標であり、以下の(4)のように ρ の増加とともに主体の危険回避度が増加するように定義される⁽¹⁾。効用関数 u は連続であり、 w と ρ に関して少なくとも3回微分可能であるとする。また、限界効用は全域にわたって正 ($u_w > 0$) であり、効用関数は凹 ($u_{ww} < 0$) である。

Arrow [1], Pratt [6] 及び Menezes and Hanson [5] に沿って三種の危険回避測度を定義する。

絶対危険回避：

$$R_A(w) = -u_{ww}(w, \rho)/u_w(w, \rho)$$

相対危険回避：

$$R_R(w) = -w \cdot u_{ww}(w, \rho)/u_w(w, \rho)$$

偏相対危険回避：

$$R_P(y+z) = -z \cdot u_{ww}(y+z, \rho)/u_w(y+z, \rho)$$

ただし、 $w = y+z$ とする⁽²⁾。

このように定義された絶対危険回避 R_A は、危険回避パラメータ ρ の増加とともに増加するように設けられる。

$$(4) \quad \frac{\partial R_A}{\partial \rho} = -\frac{u_{w\rho\rho}u_w - u_{ww}u_{w\rho}}{u_w^2} > 0$$

投資主体の期待効用は(3)式の効用関数における危険資産収穫率 x を確率変数と見立てて、次のように表される。

$$(5) \quad E[u] = \int_a^b u((1+i)w_0 + (x-i)(w_0-m), \rho) f(x, r) dx$$

$f(x, r)$ は確率変数 $x \in [a, b]$ の主観的確率密度関数の族であり、 x の上限 b は正であるが、下限 a は必ずしも正である必要はない。 r は、後述するように平均保存的拡散を表すパラメータとして導入される。

2. 期待効用極大化

個別投資主体の最適化問題は次のように述べられる。効用関数(5)を m に関して極大化する。この極大化の1階の条件は

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial E[u]}{\partial m} &= \int_a^b u_m((1+i)w_0 + (x-i)(w_0-m), \rho) f(x, r) dx \\ &= -\int_a^b v_w((1+i)w_0 + (x-i)(w_0-m), \rho) (x-i) f(x, r) dx = 0 \end{aligned}$$

であり、2階の条件は

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 E[u]}{\partial m^2} &= \int_a^b u_{mm}((1+i)w_0 + (x-i)(w_0-m), \rho) f(x, r) dx \\ &= \int_a^b u_{ww}((1+i)w_0 + (x-i)(w_0-m), \rho) (x-i)^2 f(x, r) dx < 0 \end{aligned}$$

である。

1階の条件(6)の解 m^* を(7)に代入した結果が負であれば、 m^* は(5)の極大解である。

補助定理 1 任意の $\xi \in [a, b]$ に対して

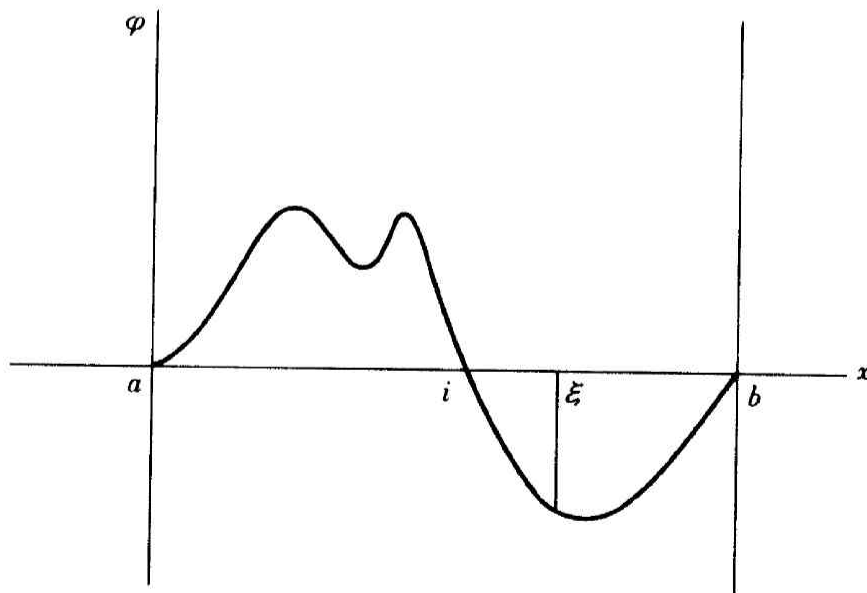
$$(8) \quad \int_a^\xi u_m((1+i)w_0 + (x-i)(w_0-m), \rho) f(x, r) dx \geq 0$$

である。

証明： $\phi(x) = u_m \cdot f(x, r) = -u_w \cdot (x-i) \cdot f(x, r)$ と置く。 ϕ は区間 $[a, b]$ において x に関して連続かつ微分可能である。 x の取り得る値に応じて ϕ は以下のようなになる。まず、 $x=a$ において密度関数 $f(a, r) = 0$ だから $\phi(a) = -u_w \cdot (a-i) \cdot f(a, r) = 0$ 。 $a < x < i$ に対して $u_w > 0$, $x-i < 0$, $f(x, r) \geq 0$ だから $\phi(x) = -u_w \cdot (x-i) \cdot f(x, r) \geq 0$ 。 $x=i$ において $\phi(i) = -u_w \cdot (i-i) \cdot f(i, r) = 0$ 。 $i < x < b$ に対して $u_w > 0$, $x-i > 0$, $f(x, r) \geq 0$ だから $\phi(x) = -u_w \cdot (x-i) \cdot f(x, r) \leq 0$ 。 $x=b$ において $f(b, r) = 0$ だから $\phi(b) = -u_w \cdot (b-i) \cdot f(b, r) = 0$ である。1階の条件(6)により $\int_a^b \phi(x) dx = 0$ かつ $\int_a^b f(x, r) dx \equiv 1$ の定義により任意の $\xi \in [a, b]$ に対して $\int_a^\xi \phi(x) dx \geq 0$ を得る。||

図-1 は単峰でない確率分布 f の一例を図示している。区間 $[a, i]$ における ϕ 曲線は横軸の上側にあるが、区間 $[i, b]$ における ϕ 曲線は横軸の下側にある。両者の面積は等しく、全域 $[a, b]$ にわたって面積の和はゼロになっている。それ故、任意の $\xi \in [a, b]$ に対して $\int_a^\xi u_m f(x, r) dx \geq 0$ である。

図-1 補助定理1の ϕ 曲線グラフの一例



補助定理2 もし偏相対危険回避 $R_p(z) = -(x-i)(w_0-m) \frac{u_{ww}}{u_w}$ が $z = (x-i)$

$(w_0 - m)$ に関して逓増的であるならば、そのときに限り、2階の条件(7)が成り立つ。ただし、偏相対危険回避は z 、すなわち、 x に関して単調であるとする。

証明：2階の条件(7)に部分積分を施す。

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \int_a^b u_{mm} \cdot f(x, r) dx = \int_a^b u_{ww} \cdot (x - i)^2 f(x, r) dx \\
 & = \int_a^b \frac{u_{ww}}{u_w} \cdot (x - i) \cdot u_w \cdot (x - i) \cdot f(x, r) dx \\
 & = - \int_a^b \frac{u_{ww}}{u_w} (x - i) u_m f(x, r) dx \\
 & = - \left[\frac{u_{ww}}{u_w} (x - i) \left\{ \int_a^x u_m \cdot f(t, r) dt \right\} \right]_a^b \\
 & + \int_a^b \left\{ \frac{u_{www} u_w - u_{ww}^2}{u_w^2} (x - i) (w_0 - m) + \frac{u_{ww}}{u_w} \right\} \left\{ \int_a^x u_m \cdot f(t, r) dt \right\} dx \\
 & = - \int_a^b \left\{ \frac{\partial R_A}{\partial w} (x - i) (w_0 - m) + R_A \right\} \left\{ \int_a^x u_m \cdot f(t, r) dt \right\} dx \\
 & = - \int_a^b \frac{\partial R_P}{\partial z} \left\{ \int_a^x u_m \cdot f(t, r) dt \right\} dx
 \end{aligned}$$

もしすべての $x \in [a, b]$ に対して $\partial R_P / \partial z > 0$ であるならば、補助定理1より $\int_a^x u_m \cdot f(t, r) dt \geq 0$ 、よって $\int_a^b u_{mm} f(x, r) dx < 0$ 、すなわち2階の条件が成り立つ。逆に、もしすべての $x \in [a, b]$ に対して $\partial R_P / \partial z \leq 0$ ならば、補助定理1より $\int_a^x u_m \cdot f(t, r) dt \geq 0$ だから $\int_a^b u_{mm} f(x, r) dx \geq 0$ を得る。これは極小化の2階の条件である。 ||

3. 初期富変化の効果

1階の条件(6)を初期富 w_0 と确实資産保有額 m に関して微分する。

$$(10) \quad \frac{\partial m}{\partial w_0} = \frac{\int_a^b u_{mw_0} \cdot f(x, r) dx}{-\int_a^b u_{mm} \cdot f(x, r) dx}$$

上式の符号は、分母が正だから、分子の符号を判定すれば決められる。よって、分子は

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & \int_a^b u_{mw} f(x, r) dx = \int_a^b \frac{u_{ww}}{u_w} (1+x) u_m f(x, r) dx \\
 & = \left[\frac{u_{ww}}{u_w} (1+x) \int_a^x u_m f(t, r) dt \right]_a^b \\
 & \quad - \int_a^b \left\{ \frac{u_{www} u_w - u_{ww}^2}{u_w^2} (1+x) (w_0 - m) + \frac{u_{ww}}{u_w} \right\} \left\{ \int_a^x u_m \cdot f(t, r) dt \right\} dx \\
 & = \int_a^b \left\{ \frac{\partial R_A}{\partial w} (1+x) (w_0 - m) + R_A \right\} \left\{ \int_a^x u_m \cdot f(t, r) dt \right\} dx \\
 & = \int_a^b \left\{ \frac{\partial R_P}{\partial z} + \frac{\partial R_A}{\partial w} (1+i) (w_0 - m) \right\} \left\{ \int_a^x u_m \cdot f(t, r) dt \right\} dx
 \end{aligned}$$

ただし $z = (x-i)(w_0-m)$ より $(1+x)(w_0-m) = z + (1+i)(w_0-m)$ を用いる。補助定理1より $\int_a^x u_m f(t, r) dt \geq 0$ かつ補助定理2より $\partial R_P / \partial z > 0$ 、また $(1+i) > 0$ だから、 $\frac{\partial R_A}{\partial w} (w_0 - m) \geq 0$ ならば $\partial m / \partial w_0 > 0$ である。すなわち、もし $\partial R_A / \partial w \geq 0$ ならば $w_0 \geq m$ に対して、また、もし $\partial R_A / \partial w \leq 0$ ならば $w_0 \leq m$ に対して、 $\partial m / \partial w_0 > 0$ である。それ以外の場合、符号は不確定である。換言すれば、非逓減的絶対危険回避の場合、現物投資と信用買いの立場に対して初期富が増加するにつれて確実資産の保有は増加する。また、非逓増的絶対危険回避の場合、空売りの立場に対して初期富が増加するにつれて確実資産の保有は増加する。つまり、これらの場合、確実資産は正常財である。これ以外の場合、確実資産の保有に及ぼす初期富の効果は不確定である。

4. 利子率効果

1階の条件(6)を確定資産利子率 i と確実資産保有額 m に関して微分して次を得る。

$$(12) \quad \frac{\partial m}{\partial i} = \frac{\int_a^b u_{mi} f(x, r) dx}{-\int_a^b u_{mm} f(x, r) dx}$$

(12)式の分母は2階の条件(7)に負号を付けたものに他ならず、分母の符号は正である。よって、 $\partial m / \partial i$ の符号を知るためには分子の符号を調べればよい。

(12)式の分子は以下のように変形される。

$$(13) \quad \int_a^b u_{mi} \cdot f(x, r) dx = \int_a^b \{-u_{ww} \cdot (x-i)m + u_w\} f(x, r) dx$$

$$= \int_a^b \left(-\frac{u_{ww}}{u_w} m\right) u_w (x-i) \cdot f(x, r) dx + \int_a^b u_w \cdot f(x, r) dx$$

$$= \left[\frac{u_{ww}}{u_w} m \left\{ \int_a^x u_m \cdot f(t, r) dt \right\} \right]_a^b$$

$$- \int_a^b \frac{u_{www} u_w - u_{ww}^2}{u_w^2} (w_0 - m) m \left\{ \int_a^x u_m \cdot f(t, r) dt \right\} dx + \int_a^b u_w f(x, r) dx$$

$$= (w_0 - m) m \int_a^b \left(\frac{\partial R_A}{\partial w} \right) \left\{ \int_a^x u_m f(t, r) dt \right\} dx + \int_a^b u_w f(x, r) dx$$

上式で $\int_a^b u_w f(x, r) dx > 0$ だから、補助定理1を用いて次の結果が得られる。

もし $\partial R_A / \partial w > 0$ ならば、 $0 < m < w_0$ に対して $\partial m / \partial i > 0$ である。もし $\partial R_A / \partial w < 0$ ならば、 $m \leq 0$ または $w_0 \leq m$ に対して $\partial m / \partial i > 0$ である。それ以外の場合は不確定である。

換言すれば、逡増的絶対危険回避の場合、現物持高に対して確定利子率の上昇に応じて確実資産保有は増加する。また、逡減的絶対危険回避の場合、信用買いと空売りに対して確定利子率の上昇に応じて確実資産の保有は増加する。これ以外の場合は、確定利子率の変化が確実資産保有に及ぼす効果は不確定である。

5. 期待収穫率の変化

危険資産収穫率 x の確率分布 f は投資主体の主観的予想を体現したものと見

なされる。確率分布 f の左右への加法的シフトはシフト・パラメーター h の値により指定される⁽⁶⁾。

$$(14) \quad x(h) = x + h$$

すると、 $h = 0$ は分布の原位置を指定することになる。

$$(15) \quad \mu(h) = \int_a^b (x+h)f(x, r) dx = \int_a^b xf(x, r) dx + h = \mu(0) + h$$

$d\mu(h)/dh = 1$ を得るから、 h の変化は危険保存的平均変化と見ることができ
る。

1 階の条件(6)を確率分布シフト・パラメーター h と確実資産保有額 m に関して微分して整理する。

$$(16) \quad \frac{\partial m}{\partial h} = \frac{\int_a^b u_{mh} f(x, r) dx}{-\int_a^b u_{mm} f(x, r) dx}$$

分母の符号は正だから、分子の符号を判定する。分子を次のように変形する。

$$\begin{aligned} (17) \quad \int_a^b u_{mh} \cdot f(x, r) dx &= \int_a^b \{-u_{ww} \cdot (x-i)(w_0-m) - u_w\} f(x, r) dx \\ &= \int_a^b \left(-\frac{u_{ww}}{u_w} (w_0-m) \right) u_w \cdot (x-i) \cdot f(x, r) dx - \int_a^b u_w \cdot f(x, r) dx \\ &= \left[\frac{u_{ww}}{u_w} (w_0-m) \left\{ \int_a^x u_m f(t, r) dt \right\} \right]_a^b \\ &\quad - \int_a^b \frac{u_{www} u_w - u_{ww}^2}{u_w^2} (w_0-m)^2 \left\{ \int_a^x u_m f(t, r) dt \right\} dx - \int_a^b u_w f(x, r) dx \\ &= (w_0-m)^2 \int_a^b \left(\frac{\partial R_A}{\partial w} \right) \left\{ \int_a^x u_m f(t, r) dt \right\} dx - \int_a^b u_w f(x, r) dx \end{aligned}$$

上式末尾の $\int_a^b u_w f(x, r) dx > 0$ と補助定理 1 により次の判定結果を得る。

もし $\partial R_A / \partial w > 0$ ならば、第 1 項はあらゆる最適確実資産保有水準の m に対して正になるが、第 2 項は負なので符号は不確定である。もし $\partial R_A / \partial w < 0$ ならば、第 1 項はあらゆる最適な m に対して負になるから、第 2 項の負と呼応して $\partial m / \partial h < 0$ である。具体的に言えば、逓増的危険回避の場合は、あらゆる

確実資産持高において危険資産の期待収穫率の変化が確実資産保有に及ぼす効果は不確定である。これに対して、逡減的危険回避の場合、あらゆる確実資産持高において危険資産の期待収穫率の上昇は確実資産の保有額を減少させる。

6. 収益率の一般的上昇の効果

危険資産収益率 x の変化 dh と確実資産の確定利子率の変化 di とは何らかの形で関連することが想定される。例えば、

$$(18) \quad di = dh$$

となる。これは、危険資産収益率の変化 dh と確実資産利子率の変化 di とが同率関係にあるとする最も単純な形式を考える。もしこのような関係が利子構造上に成立するならば、収益率の一般的上昇が確実資産保有に及ぼす効果は1階の条件(6)を h と i 及び m に関して微分した形式に(18)を用いて整理すればよい。

$$(19) \quad \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{\partial i / \partial h = 1} = \frac{\int_a^b u_{mi} f(x, r) dx + \int_a^b u_{mh} f(x, r) dx}{-\int_a^b u_{mm} f(x, r) dx}$$

分母の符号は正だから、分子の符号を判定すると、この場合の確実資産保有に及ぼす効果を知ることができる。(13)と(17)を合成する。

$$(20) \quad \int_a^b u_{mi} \cdot f(x, r) dx + \int_a^b u_{mh} f(x, r) dx \\ = (w_0 - m) m \int_a^b \left(\frac{\partial R_A}{\partial w} \right) \left\{ \int_a^x u_m f(t, r) dt \right\} dx + \int_a^b u_{wf} f(x, r) dx \\ + (w_0 - m)^2 \int_a^b \left(\frac{\partial R_A}{\partial w} \right) \left\{ \int_a^x u_m f(t, r) dt \right\} dx - \int_a^b u_{wf} f(x, r) dx \\ = (w_0 - m) w_0 \int_a^b \left(\frac{\partial R_A}{\partial w} \right) \left\{ \int_a^x u_m f(t, r) dt \right\} dx$$

通常、資産選択理論は確実資産利子率 i を有期預金利子率と考える一方で、危険収益率 x は株式や債券の資本利得率ないし確定利子率の和であり、市場での取引価格形成が有期預金利子率 i の変動をよく反映すると思われる。それ故、この種の複合的效果を取り扱うことは、単独に個別効果を取り上げるより

も現実的であるかも知れない。

(20)において補助定理1を考慮すれば、もし $\partial R_A/\partial w > 0$ ならば、 $m < w_0$ に対して $\partial m/\partial h |_{\partial i/\partial h = 1} > 0$ 、 $m = w_0$ に対して $\partial m/\partial h |_{\partial i/\partial h = 1} = 0$ 、 $m > w_0$ に対して $\partial m/\partial h |_{\partial i/\partial h = 1} < 0$ である。もし $\partial R_A/\partial w = 0$ ならば、全域に対して $\partial m/\partial h |_{\partial i/\partial h = 1} = 0$ である。またもし $\partial R_A/\partial w < 0$ ならば、 $m < w_0$ に対して $\partial m/\partial h |_{\partial i/\partial h = 1} < 0$ 、 $m = w_0$ に対して $\partial m/\partial h |_{\partial i/\partial h = 1} = 0$ 、 $m > w_0$ に対して $\partial m/\partial h |_{\partial i/\partial h = 1} > 0$ である。

すなわち、収益率の一般的上昇は、逓増的絶対危険回避の場合、(現物及び信用買いの) 買い長の立場では確実資産保有の増加に導き、(全部が確実資産の) 持高ゼロの立場では確実資産保有一定のままであり、(空売りの) 売り長の立場では確実資産保有の減少に導く。また、絶対危険回避一定の場合、全域の立場で確実資産保有は変化しない。他方で、収益率の一般的上昇は、逓減的絶対危険回避の場合、(現物及び信用買いの) 買い長の立場では確実資産保有の減少に導き、(全部が確実資産の) 持高ゼロの立場では確実資産保有一定のままであり、(空売りの) 売り長の立場では確実資産保有の増加に導く。

7. 危険回避指標変化の効果

1階の条件(6)を危険回避の序数的指標 ρ と確実資産 m に関して微分する。

$$(21) \quad \frac{\partial m}{\partial \rho} = \frac{\int_a^b u(w, \rho)_{m\rho} f(x, r) dx}{-\int_a^b u_{mm} f(x, r) dx}$$

分母は正だから、分子の符号を判定すればよい。そこで分子を次のように変形する。

$$(22) \quad \int_a^b u_{m\rho}(w, \rho) f(x, r) dx = \int_a^b \frac{u_{m\rho}(w, \rho)}{u_m(w, \rho)} u_m(w, \rho) f(x, r) dx \\ = \left[\frac{u_{m\rho}}{u_m} \int_a^x u_m f dt \right]_a^b - \int_a^b \frac{u_{w\rho} u_w - u_{w\rho} u_{ww}}{u_w^2} (w_0 - m) \left(\int_a^x u_m f dt \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_a^b \frac{u_{ww\rho} u_w - u_{w\rho} u_{ww}}{u_w^2} (w_0 - m) \left(\int_a^x u_m f dt \right) dx \\
&= (w_0 - m) \int_a^b \left(\frac{\partial R_A}{\partial \rho} \right) \left(\int_a^x u_m f dt \right) dx
\end{aligned}$$

上式で(4)の定義 $\partial R_A / \partial \rho > 0$ と補助定理 1 により積分の項は正,

$\int_a^b \left(\frac{\partial R_A}{\partial \rho} \right) \left(\int_a^x u_m f dt \right) dx > 0$ だから, (22)の符号は $w_0 - m$ の符号に依存する。

それ故, $m < w_0$ に対して $\partial m / \partial \rho > 0$, $m = w_0$ に対して $\partial m / \partial \rho = 0$, $m > w_0$ に対して $\partial m / \partial \rho < 0$ である。すなわち, (現物投資と信用買いの) 買い長の立場に対して投資主体が危険回避的になればなるほど確実資産の保有は増加する。全部が確実資産保有の持高ゼロの立場では危険回避化は確実資産保有に影響を与えない。また, (空売りの) 売り長の立場に対して投資主体が危険回避的になればなるほど確実資産の保有は減少する。つまり, 確実資産は, 買い長の場合, 危険反発的であり, 売り長の場合, 危険順応的である。

8. 平均保存的拡散の効果

有限な領域で定義される確率変数 x の二つの分布関数を $F(x)$, $G(x)$ とする。一般性を失うことなく, この領域を単位区間 $[0, 1]$ と仮定できる。もし $F(x)$ の確率分布の平均値を一定に保ちながら, ウェイトを中心から両尾へシフトさせて $G(x)$ を導出するならば, $G(x)$ は $F(x)$ と少なくとも同じに危険である。これら二つの分布の開差を平均保存的危険増加と呼び, 関数 $S(x) = G(x) - F(x)$ を平均保存的拡散という。この平均保存的拡散は, 形式上, 次の二つの積分条件で特徴づけられる。

$$(23) \quad \int_0^1 [G(x) - F(x)] dx = 0$$

$$(24) \quad \int_0^y [G(x) - F(x)] dx \geq 0, \quad \forall y \in [0, 1]$$

確率変数 x の効用関数 $u(x)$ に関して上述の概念を再定義すると, 期待効用を一定に留めながら危険を増加させる平均効用保存的拡散の積分条件を次のよ

うに提示できる。

$$(25) \quad \int_0^1 u_x(x) \{G(x) - F(x)\} dx$$

$$(26) \quad \int_0^y u_x(x) \{G(x) - F(x)\} dx \geq 0, \quad \forall y \in [0, 1]$$

Diamond-Stiglitz [2] に従い、分布関数のシフトをパラメーター r の連続的変化で表す。分布関数の族を $F(x, r)$ と表して積分条件を書き直せば、

$$(27) \quad \int_0^1 u_x F_r(x, r) dx = 0$$

$$(28) \quad \int_0^y u_x F_r(x, r) dx \geq 0, \quad \forall y \in [0, 1]$$

となる。これは連続型の平均効用保存的拡散の積分条件である。

1 階の条件(6)を m と r に関して微分すると次式を得る。

$$(29) \quad \frac{\partial m}{\partial r} = \frac{\int_a^b u_m(w, \rho) f_r(x, r) dx}{-\int_a^b u_{mm} f(x, r) dx}$$

この分子は部分積分を2回適用し、(27)を用いて以下のように変形される。ただし $z = (x - i)(w_0 - m)$ と置く。

$$\begin{aligned} (30) \quad \int_a^b u_m f_r(x, r) dx &= [u_m F_r(x, r)]_a^b - \int_a^b \frac{u_{mx}}{u_x} u_x F_r(x, r) dx \\ &= \int_a^b \frac{u_{mxx} u_x - u_{mx} u_{xx}}{u_x^2} \left\{ \int_a^x u_t F_r(t, r) dt \right\} dx \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial R_A}{\partial w} (x - i)(w_0 - m) + R_A \right\} \left\{ \int_a^x u_t F_r(t, r) dt \right\} dx \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial R_P}{\partial z} \right\} \left\{ \int_a^x u_t F_r(t, r) dt \right\} dx \end{aligned}$$

補助定理2により $\partial R_P / \partial z > 0$ だから、(28)を用いて、 $\partial m / \partial r > 0$ を得る。すなわち、危険が平均効用保存的に増加するにつれて確実資産保有は危険中和的に増加する。

9. 個別主体の流動性選好関数

James Tobin [8] は 2 パラメーター方式における資産選択論の見地で流動性選好を始めて導出し、大きな貢献を果たした。⁽⁷⁾ Tobin は、収穫率の 2 次効用関数から σ - μ 平面における無差別曲線を導き、それがコンソルと現金の投資機会線と接する点の軌跡から市場利子率に関する現金需要の流動性選好関数の曲線を導出したのである。この Tobin の流動性選好モデルの重要な特徴は二つの論点に絞ることができる。第一に、Keynes 及び Keynes 学派が主張した流動性選好モデルでは、個々の投資主体が現行市場利子率において行う現金かコンソルかの二者択一的な選択を社会全体で集計して始めて滑らかな右下がりの流動性選好関数を得るとするのに対して、Tobin は個別投資主体の段階で現行利子率における現金とコンソルの多様化投資を行うとする行動仮説を始めて明示的に導入したのである。Tobin のこの処理方法は、彼が提唱した分離定理に集約される。すなわち、個別投資主体の危険資産混合の内部構成比はその投資残高に占める危険資産混合の割合からは独立であって、投資主体は多種危険資産混合を一定の構成比で合成したあと、あたかも単一の資産であるかのようにその混合と現金の配分を行うことになる。

第二に、Tobin は g を危険資産単位投資額当たり資本利得とし、 η を確定利子率として、危険資産収穫率 x を

$$(31) \quad x = g + \eta$$

と規定した。ただし、この種の危険資産は市場性を有する債券であり、 g は確率変数、 η は非確率変数である。Tobin は、この危険資産収穫率の期待値

$$(32) \quad E[x] = E[g] + \eta$$

において、とりわけ $E[g] = 0$ と仮定する。この仮定は表面上、危険資産混合の市場価格が穏やかに変動するために期待値がゼロになるように解釈されているが、その本質的な骨子は期待収穫率 $E[x]$ を Keynes の市場利子率 η の概念に適合させる意図にあった。すなわち、 $E[g] = 0$ と置くことにより資産混合の期待収穫率が確定利子率に等しくなるのである。

$$(33) \quad E[x] = E[g] + \eta = \eta$$

これはまさに市場利子率をコンソル公債の利子率として認識した Keynes モ

デルに整合させるための単純かつ巧妙な工夫であったといえる。そこでわれわれのモデルでは Keynes ないし Tobin の趣旨に沿って危険資産をコンソル公債と見なし、期待収穫率をコンソル公債の市場利子率と見立てて議論を進めることにする。すなわち、 p^f をコンソル公債1枚の将来価格、 p をその現行価格、 π をコンソル公債1枚の確定利子として、

$$(34) \quad E[x] = E\left[\frac{p^f - p + \pi}{p}\right] = E\left[\frac{p^f - p}{p}\right] + \frac{\pi}{p}$$

$$= E[g] + \eta = \eta$$

ただし、 $g = \frac{p^f - p}{p}$ かつ $\eta = \frac{\pi}{p}$ と置く。

流動性選好の対象である現金は確定利子率 $i = 0$ の確実資産であるから、この場合、現行富は $w = m + (1+x)(w_0 - m) = (1+x)w_0 - xm$ となり、5節の(17)式で $i = 0$ と置いた形式を採用すると、これは個別主体流動性選好関数の微係数を表すことになる。

$$(35) \quad \frac{\partial m}{\partial h} \Big|_{\text{分子}} = (w_0 - m)^2 \int_a^b \left(\frac{\partial R_A}{\partial w}\right) \left\{ \int_a^x u_m f(t, r) dt \right\} dx - \int_a^b u_w f(x, r) dx$$

先に5節で展開したように、Arrowの遞減的絶対危険回避の仮定を採用するならば、「もし $\partial R_A / \partial w < 0$ ならば、 $\partial m / \partial h < 0$ である」となるから、あらゆる確実資産持高において市場利子率の上昇は現金保有額を減少させることになる。すなわち、流動性選好関数の勾配は現金保有のあらゆる水準において右下がりになっていることが判る。

次に、 h に関する m の2次導関数を求めると、

$$(36) \quad \frac{\partial^2 m}{\partial h^2} = \frac{-\int_a^b u_{mhh} f dx \int_a^b u_{mm} f dx + \int_a^b u_{mh} f dx \int_a^b u_{mmh} f dx}{\left(\int_a^b u_{mm} f dx\right)^2},$$

これは個別主体流動性選好関数の曲率を表す。ここで上式の分子は $m = w_0$ においてゼロになる。

$$(37) \quad -\int_a^b u_{mhh} f dx \int_a^b u_{mm} f dx + \int_a^b u_{mh} f dx \int_a^b u_{mmh} f dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \{u_{www} \cdot (w_0 - m)^2 x + 2u_{ww} \cdot (w_0 - m)\} f dx \cdot \int_a^b u_{ww} x^2 f dx \\
&+ \int_a^b \{u_{ww} \cdot (w_0 - m) x + u_w\} f dx \cdot \int_a^b \{u_{www} \cdot (w_0 - m) x^2 + 2u_{ww} x\} f dx \\
&= 2 \int_a^b u_w f dx \int_a^b u_{ww} x dx = 0
\end{aligned}$$

ただし、これは最終項で

$$(38) \quad \int_a^b u_{ww} x f dx = \int_a^b \frac{u_{ww}}{u_w} u_w x f dx = - (w_0 - m) \int_a^b \left(\frac{\partial R_A}{\partial w} \right) \left(\int_a^b u_m dt \right) dx = 0$$

となることを用いている。(37)が $m = w_0$ においてゼロになることは個別主体流動性選好関数が $m = w_0$ において変曲点を持つことを意味している。そしてこの流動性選好関数は変曲点の左側($m < w_0$)では凹($\partial^2 m / \partial h^2 < 0$)、右側($m > w_0$)では凸($\partial^2 m / \partial h^2 > 0$)⁽⁸⁾であることが判定される。

流動性選好関数は連続かつ一意的であるから、いくつかの現金保有水準における勾配を組織的に検討する。

$m = -w_0$ において $\partial m / \partial h |_{m = -w_0}$ の分子は負になる。

$$(39-1) \quad 4w_0^2 \int_a^b \left(\frac{\partial R_A}{\partial w} \right) \left(\int_a^b u_m dt \right) dx - \int_a^b u_w f dx < 0$$

ただし逡減的絶対危険回避を仮定し、補助定理1を用いる。

$m = 0$ において $\partial m / \partial h |_{m = 0}$ の分子は負になる。

$$(39-2) \quad w_0^2 \int_a^b \left(\frac{\partial R_A}{\partial w} \right) \left(\int_a^x u_m dt \right) dx - \int_a^b u_w f dx < 0$$

ただし逡減的絶対危険回避を仮定し、補助定理1を用いる。しかし、これは前よりも負勾配が緩やかになっている。

$m = w_0$ において $\partial m / \partial h |_{m = w_0}$ の分子は負になる。

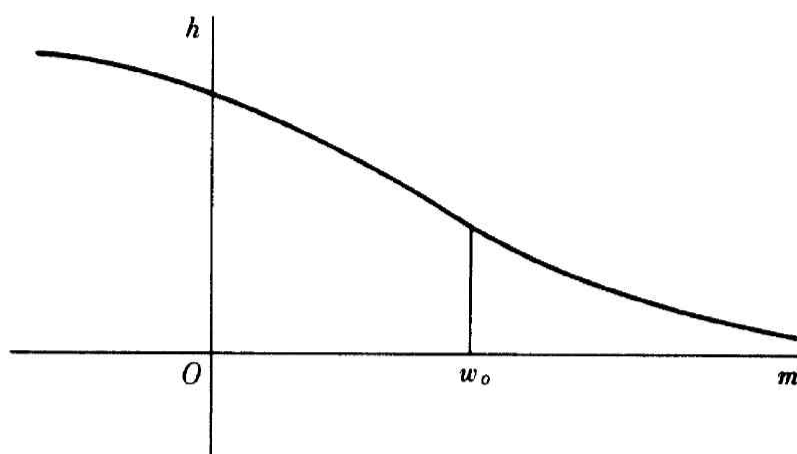
$$(39-3) \quad - \int_a^b u_w f dx < 0$$

ただしこれは変曲点における勾配であり、最も緩いものである。

$m = 2w_0$ において $\partial m / \partial h |_{m = 2w_0}$ の分子は負である。

$$(39-4) \quad (-w_0)^2 \int_a^b \left(\frac{\partial R_A}{\partial w} \right) \left(\int_a^x u_m dt \right) dx - \int_a^b u_w f dx < 0$$

図-2 個別主体の流動性選好関数



ただしこれは $m=0$ におけるよりも負勾配がきつい。

また、 $m \rightarrow \pm\infty$ に対して $\partial m / \partial h \rightarrow -\infty$ となる。よって、流動性選好関数は $-\infty$ から w_0 までの区間で凹であり、 w_0 から $+\infty$ の区間で凸であると判定できる。

図-2 では縦軸を市場利子率 h 、横軸を貨幣保有量 m とし、個別投資主体の流動性選好関数のグラフを描いている。 $m < 0$ の領域は現金を借り入れてコンソルを信用買いし、 $0 < m < w_0$ の領域は現物取引をし、 $m > w_0$ はコンソルを空売りして現金を貸し付ける領域である。

実際に、この領域は左右に無限に延びているのではない。現実の証券市場の信用取引には一定の証拠金率において現金または有価証券の供託が要求されており、無制限ではない。それ故、信用買いと空売りには金融制度上、設けられた証拠金率による限度額が各投資主体ごとに決められるから、この限度額規制により貨幣保有額 m には上限と下限が現れる。

10. 集計的流動性選好関数

マクロ経済学的意味での集計的流動性選好関数は個別投資主体の流動性選好関数を市場利子率 h の各水準について経済全体で集計することによって得られる。

$$(40) \quad m_A = \sum_{i=1}^n m_i(h)$$

ただし、 m_i は個別主体 i の保有貨幣額であり、 m_A は集計的貨幣額である。ま

た、経済全体の初期富の保有額を

$$(41) \quad W_0 = \sum_{i=1}^n w_{0i}$$

とする。

集計的流動性選好関数のグラフは、本質的に図-2と同様の形態を保存することになるが、流動性選好関数を集計するとき、以下の事情を考慮すべきである。すなわち、経済全体で各投資主体間の貸借は相殺されて純保有総額が残る。それ故、経済全体で超過貸借が起こると、 $m_A < 0$ または $m_A > W_0$ の領域がその状況に対応して可能となる。 $m_A < 0$ は経済全体で（純の意味で）現金を借り入れてコンソル公債を購入し保有する信用買いの領域である。また $m_A > W_0$ はコンソル公債を空売りして代金を貸し付ける空売りの領域である。

個別投資主体の負勾配の流動性選好関数を経済全体で集計した集計的流動性選好関数の h に関する1次導関数 ($\partial m_A / \partial h$) はやはり m_A の全域にわたって負であることが判る。

$$(42) \quad \frac{\partial m_A}{\partial h} = \frac{\partial m_1}{\partial h} + \frac{\partial m_2}{\partial h} + \dots + \frac{\partial m_n}{\partial h} < 0$$

また、個別投資主体のすべての流動性選好関数が初期富 w_0 を境にして左方で凹、右方で凸であることから、集計的流動性選好関数も総初期富 $W_0 (= \sum_{i=1}^n w_{0i})$ の位置を変曲点とし、左方で凹、右方で凸である類似のパターンを持つことが推察される。特に、 m_A の h に関する2階の導関数がゼロ、

$$(43) \quad \frac{\partial^2 m_A}{\partial h^2} = \frac{\partial^2 m_1}{\partial h^2} + \frac{\partial^2 m_2}{\partial h^2} + \dots + \frac{\partial^2 m_n}{\partial h^2} = 0,$$

となるような変曲点は明らかに一意であり、経済全体の投資主体の貨幣保有総額 ($\sum_i m_i = m_A$) が初期富の総額 ($\sum_i w_{0i} = W_0$) に等しいところで変曲点が現れる。

$$(44) \quad m_A = W_0$$

集計的流動性選好関数のグラフは、図-2に示す個別投資主体の流動性選好関数のグラフと形態的に同じである。ここでも同様に、グラフの左方と右方の両尾が無限に延びているのではなく、証券市場における各投資主体の信用取引

証拠金率による限度額に応じて総和としての上限と下限が規定される。それ故、左方の借入れ信用買いの $m_A < 0$ 領域においてむしろ横軸に水平的になる傾向を有し、われわれが導出した集計的流動性選好関数では、「縦軸 h に近づくにつれて垂直になる」という Keynes 学派のいわゆる古典的領域は消滅している。さらに、右方の空売り領域においても Keynes 学派の流動性トラップ(罟)と呼ばれる水平部分は極限的に存在するにしても、実際には証拠金の制度的制約により実行不能であることが結論づけられる。

(注)

- (1) パラメーター ρ は効用関数に含まれ、投資主体の危険回避的態度の変化を表す。投資主体は結婚・出産・就職・昇格・破産等により危険に対する富の効用関数の形式が異なってくる。
- (2) Arrow [1] は、逓減的絶対危険回避 ($\partial R_A / \partial w < 0$) と逓増的相対危険回避 ($\partial R_R / \partial w > 0$) を仮定している。偏相対危険回避について符号は仮定されていない。
- (3) 危険資産の収穫率 x は、危険資産が市場で取り引きされるために発生する資本利得 g と配当率 d (株式) または利子率 i (債券) から成る。資本利得と配当は確率変数であり、利子率は非確率変数である。株式の収穫率は、1株当たり配当を δ として $x = \frac{p^j - p + \delta}{p} = g + d$ であるが、債券の収穫率は d を i に代えればよい。
- (4) 主観的確率密度関数は危険資産収穫に関する投資家の個人的な予想を具現する確率概念である。
- (5) 平均効用保存的拡散のパラメーター r は Diamond-Stiglitz [2] により導入されたもので、いわば2パラメーター方式における分散に代わる確率分布の包括的な拡散的变化を記述する。後述の(7)、(8)式に関連する説明を参照せよ。
- (6) Arrow [1] は確率分布の加法的シフトと乗法的シフトを導入したが、ここでの $x + h$ の取扱いは Arrow の加法的シフトの方法に近似している。乗法的シフトは後述の平均保存的拡散の概念が現在では支配的であるが、加法的シフトはむしろ危険保存的平均変化の概念として意味があろう。
- (7) Tobin [8] の2パラメーター方式の資産選択論は確率論的について正規分布を想定したことになるという点で論難された。また、筆者の見解では、収穫率の2次効用関数を用いることから描かれる σ - μ 平面上の同心円的な無差別曲線群はかなり特殊なものであり、それ故に導出される流動性選好関数はやはり一般性を欠いていると思われる。
- (8) (7)式の符号を直接に判別するのは厄介であるために便法を用いる。

参考文献

- [1] Arrow, K. J., *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, Amsterdam, North-Holland, 1970.
- [2] Diamond, P. A. and J. E. Stiglitz, "Increases in Risk and in Risk Aversion," *Journal of Economic Theory*, 8, 1974, 337-60.
- [3] Kiritani, Tadashi, "Re-Examination of the Theory of Risk Aversion," *Journal of Faculty of Economics, Tokyo Metropolitan University, (Keizai to Keizai-gaku)*, 49, 1982, 1-8.
- [4] Kiritani, Tadashi, "A Comparative Asset Choice Analysis with Mean Utility Preserving Spreads," *Journal of the Faculty of Economics, Tokyo Metropolitan University, (Keizai to Keizaigaku)*, 56, 1985, 1-14.
- [5] Menezes, C. F., and D. L. Hanson, "On the Theory of Risk Aversion," *International Economic Review*, 11, 1970, 481-87.
- [6] Pratt, J. W., "Risk Aversion in the Small and in the Large," *Econometrica*, 32, 1964, 122-36.
- [7] Rothschild, M., and J. E. Stiglitz, "Increasing Risk : I, a Definition," *Journal of Economic Theory*, 2, 1970, 225-43.
- [8] Tobin, James, "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk," *Review of Economic Studies*, 25, 1958, 65-86.
- [9] 桐谷維, 「確率的優越性と危険回避—資産選択の現代理論」, 『経済と経済学』, 46号, 東京都立大学経済学会, 1981, 11-50.
- [10] 桐谷維, 「信用取引の資産選択」, 『経済と経済学』, 62, 東京都立大学経済学会, 1988, 1-11.